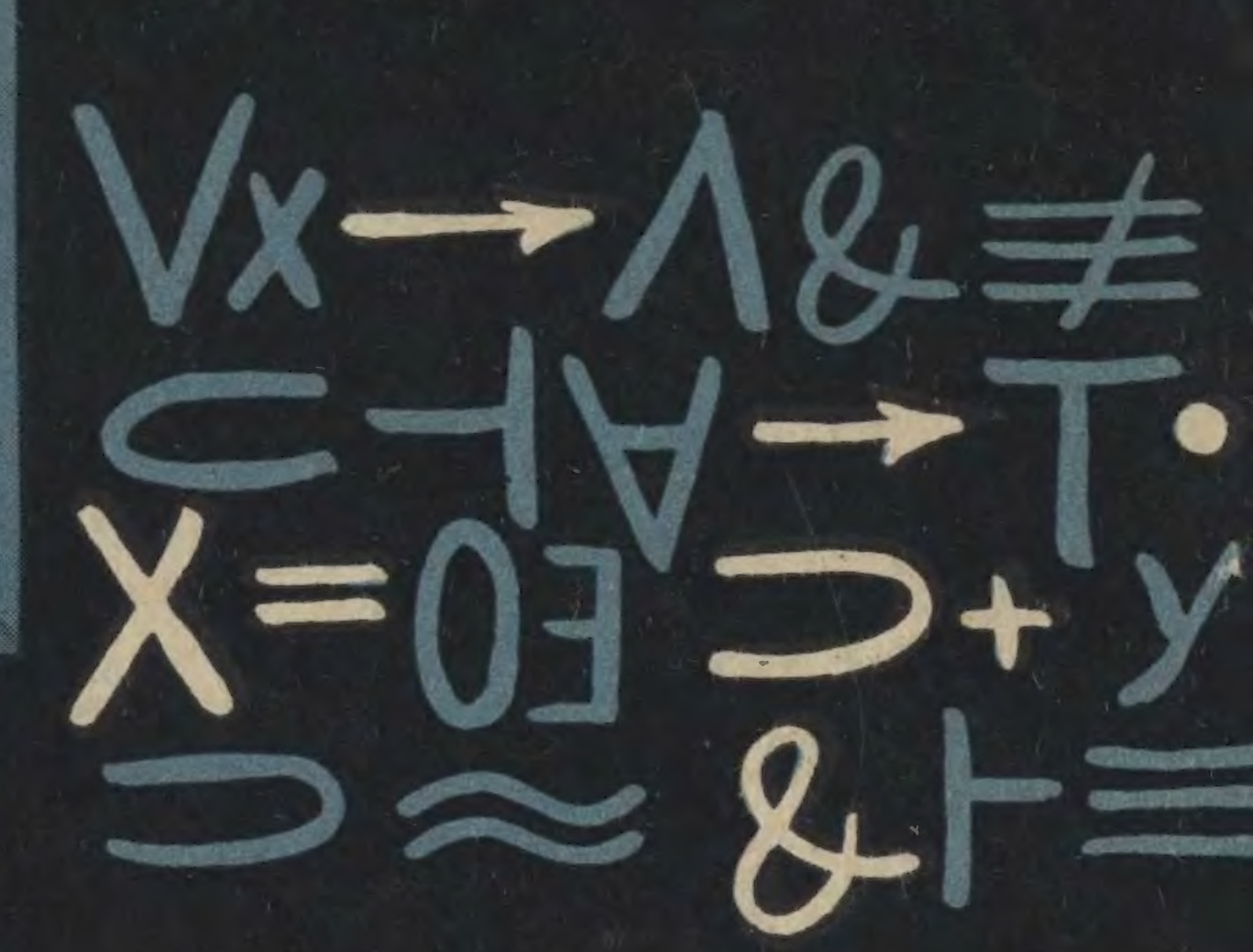
АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

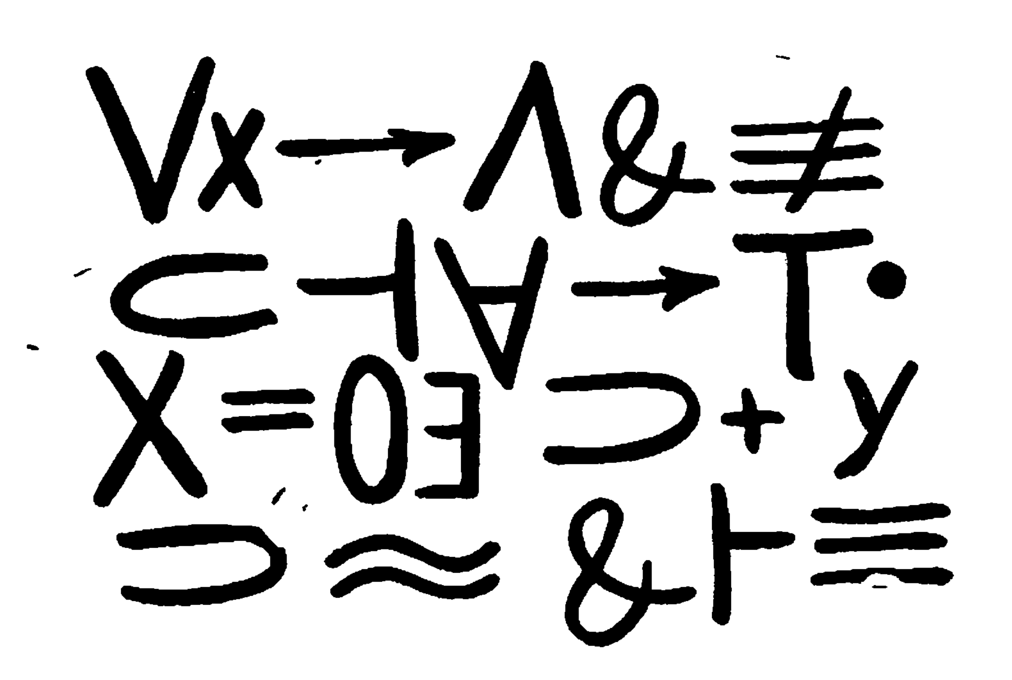


Э. Кольман, О. Зих

Занимательная логика

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ





Э. КОЛЬМАН, О. ЗИХ

Занимательная ЛОГИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА». МОСКВА. 1966

ПРЕДИСЛОВИЕ

Кое-кто из читателей, знакомых с характером прежнего преподавания логики в школе, возможно, поставит под сомнение целесообразность занимательной логики. Однако читатель, наверное, согласится с тем, что мыслить последовательно, судить доказательно, опровергать неправильные выводы должен уметь всякий: физик и поэт, тракторист и химик. Особенно в наше время, постоянно приносящее множество необыкновенных и удивительных открытий и изобретений в разнообразных областях: в географии, политике, в общественной жизни... Тот, кто хочет по-настоящему во всем этом разобраться, кто желает иметь самостоятельное мнение и защищать его, а тем более тот, кто желает активно вмешиваться в жизнь, изобретать, выдвигать рационализаторские предложения, иначе говоря, деятельно участвовать в строительстве коммунизма, тот должен уметь логически мыслить. И эта способность для своего дальнейшего развития требует упражнений, подобно тому, как для совершенствования лыжных навыков необходимо участвовать в лыжных соревнованиях. Возможно, что вы с этим несогласны. Что же, попробуйте тогда решить какую-нибудь логическую задачу, пусть столь же простую, как следующая.

Турист шел к озеру. Он дошел до перекрестка, откуда одна дорога вела вправо, другая — влево; одна из них — к озеру, другая — нет. На перекрестке сидело двое парней, из которых один всегда го-



ворил правду, а второй всегда лгал. Оба они отвечали на любой вопрос либо «да», либо «нет». Хотя все это и было туристу известно, однако он не знал, кто из них говорит правду, а кто лжет; он также не знал, какая из дорог ведет к озеру. Тогда он задал обоим вместе единственный вопрос, каждый из них дал на него свой ответ. Спрашивается, какой это был вопрос, раз турист по полученным ответам безошибочно решил, какая из дорог ведет к озеру?

(Эту задачу, ее варианты и решения читатель найдет в тексте книги).

Отметьте, сколько времени вам понадобится, чтобы получить правильное решение. Предложите решить эту задачу своим друзьям, сравните время их решения со своим — это позволит вам получить некоторые данные к сравнительной оценке их и вашей смекалки. Вы убедитесь, что тот, кому приходилось уже раньше решать логические задачи, и тем более тот, кто хотя бы немного знает современную логику, как правило, гораздо быстрее справится с задачей, чем начинающий.

Современная формальная логика, которую называют также математической, или символической, логикой, оказывает все возрастающее влияние на методы мышления нашего времени. В отличие от традиционной формальной логики, которую преподавали в школе как «науку о правильном мышлении», она имеет не только теоретическое, но и исключительно большое практическое значение. Без аппарата символической логики не могут работать кибернетические устройства, эти «думающие» автоматы, управляющие самостоятельно производственными процессами, регулирующие транспортные потоки, производящие самые сложные вычисления, осуществляющие учет, устанавливающие диагноз заболеваний, переводящие с одного языка на другой, разгадывающие письменность давнс вымерших народов или шифрованные записи, играющие в шахматы и т. д. Все это и многое другое эти электронные быстродействующие устройства делают, разумеется, не потому, что они мыслят, а потому, что люди, получившие соответствующее образование, всякий раз дают им особую программу, написанную на языке, «понятном» машинам, т. е. на языке математической логики. Так как самая широкая автоматизация физического и умственного труда является одним из важнейших рычагов построения коммунизма, в ближайшее время у нас



должно десятикратно вырасти не только число инженеров-электроников, конструкторов и наладчиков кибернетических устройств, но и программистов, в совершенстве владеющих некоторыми разделами математической логики.

Что занимательного в решении логических задач? Позволим себе такую аналогию. Любитель кроссвордов занимается ими не только из-за того, что ему нечего делать, и вовсе не потому, что он желает таким образом расширить свой умственный кругозор, а потому, что сам процесс нахождения решения дает ему ощущение силы, радости, порождаемое желанием преодолеть препятствие. Так же обстоит дело, например, с шахматными, математическими и точь-в-точь с логическими задачами, которые мы включили в эту книгу. Некоторые из них — совсем легкие, над другими же, более трудными, требующими некоторых усилий, нужно как следует задуматься. Мы взяли их из разных источников: разыскали у знакомых и в своих записных книжках, а некоторые придумали сами. При отборе задач мы придерживались двух правил: во-первых, чтобы решение не требовало почти никакого знания математики, и, во-вторых, чтобы для него было достаточно знать две наиболее простые части современной логики — логику высказываний и логику классов. Их элементарное изложение дано здесь.

Мысль о написании книги подал Э. Кольман, предложивший сотрудничество О. Зиху[1]. Просмотром задач и их решений занялся П. Матерна, исправивший встретившиеся погрешности. Введения в логику высказываний и в логику классов, равно как и в арифметическое применение последней, написаны О. Зихом. Раздел «Значение символической логики» написан Э. Кольманом. В оглавлении (в скобках) указана первая буква фамилии автора, предложившего или оформившего соответствующую задачу или решение.

Во втором разделе книги читатель найдет подробное решение каждой задачи. Главную трудность при решении задачи представляет умение точно записать ее условия при помощи логических символов в виде логических уравнений. Здесь как раз читателю поможет решение,

[1] В 1965 г. «Занимательная логика» вышла на чешском языке. Настоящее издание является авторизованным переводом с чешского. Ряд мест изменен и переработан.

однако авторы надеются, что он прибегнет к нему лишь тогда, когда ему не удастся после многократных попыток решить задачу самостоятельно. При этом авторы вовсе не полагают, что ту или другую задачу нельзя решить другим, быть может, более остроумным способом, чем тот способ, который здесь приводится, но они стремились к тому, чтобы указать путь, приводящий к успеху не только в данном, но и во всех сходных с ней задачах. Авторы просят читателей, которые найдут другие, собственные, способы решения или же которые знают другие интересные логические задачи, любезно сообщить об этом в адрес издательства, так как возможно, что при переиздании удастся их использоваать.

То обстоятельство, что мы придали логическим задачам занимательную, а иногда и шутливую форму, конечно, не снижает их познавательной ценности. Мы надеемся, что вынужденная неполнота и ограниченная строгость теоретического изложения не будут препятствовать интересу к современной логике, особенно у молодежи. Если бы нам это удалось, если бы наша книга, пусть лишь в слабой мере, выполнила в области логики задачу, подобную той, которую для распространения интереса к математике и физике выполняют книги Я. И. Перельмана «Занимательная арифметика», «Занимательная алгебра» и др., мы были бы счастливы.

Э. Кольман

Задачи

А. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

В части А приведены задачи, решение которых дано без применения методов математической логики, что, однако, не означает, будто эти методы к ним неприменимы. В этих задачах либо такое применение невыгодно, так как они решаются просто и без него, либо нужно использовать более сложные части современной логики, чем те, которые изложены в книге.

1. Книги и профессии

Каждый из пяти друзей имеет по одному сыну. Каждый сын одолжил книгу у одного из друзей своего отца. Все эти друзья имеют фамилии, обозначающие профессию, однако ни у кого фамилия не совпадает с его профессией. Сын кузнеца взял книгу Кузнецова; он же тезка профессии сына Кузнецова и одновременно того, чью книгу взял сын Кузнецова. Известно, что фамилия плотника не Столяров и что плотник взял книгу Шорникова. Какова фамилия трубочиста? (Согласно старой традиции, сын наследует профессию своего отца).

2. Профессор Кукушка

Профессор Кукушка послал своим коллегам в семь стран свои научные работы, перепутав конверты. Чех Кукачка, интересующийся орлами, получил письма на датском языке и статью о фламинго, которая была предназначена французу Куку. Последний получил итальян-

ское письмо и статью о клесте, предназначенную для голландца Кокока, который получил испанское письмо и монографию о лазоревке, интересующую датчанина Кукена, получившего статью об орлах. Итальянец Кукуло, интересующийся пчелоедом, получил немецкое письмо, а немец Кукук, интересующийся ласточками,— французское. Кто получил статью, предназначавшуюся для испанца Кукило, и на каком языке было написано письмо, которое Кукило получил?

3. Сплав

О сплаве, состоящем из неодинаковых весовых долей золота, серебра и меди, известно, что:

1) ни один из металлов, которые исследуют в лаборатории, не составляет в сплаве долю бо̀льшую, чем золото;

2) если золото составляет некоторую из низших долей веса в сплаве, то его не исследуют в лаборатории;

3) лишь один металл не исследуют в лаборатории;

4) в лаборатории не исследуют тот металл, весовая доля которого в сплаве однозначно определена предыдущими условиями;

5) если серебро или медь составляют среднюю долю в сплаве, тогда медь составляет долю бо́льшую, чем доля в этом сплаве металла, который добывают в Топонго.

Спрашивается, какую долю — бо̀льшую, среднюю, меньшую — составляет каждый из металлов в сплаве, какой металл не исследуют в лаборатории и какой добывают в Топонго?

4. Трое друзей

В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас имеет белые, один черные и один рыжие волосы, но что ни у одного из нас нет волос того цвета, на который указывает его фамилия», заметил черноволосый. «Ты прав», сказал Белов. Каков цвет волос художника?

5. В Пошехонье

В былые времена в Пошехонье сливки общества образовывали семьи Пекаревых, Колбасниковых, Возчиковых, Мясниковых, Лавочниковых, Слесаревых, Маляровых, Шорниковых и Кузнецовых. У глав этих семейств были такие же профессии, но расположены они не обязательно

в том порядке, как перечисленные фамилии. Тот, кто был шорником, был тестем слесаря. Шорников женился на единственной дочери маляра, которая отказала сватавшимся соперникам Шорникова, пекарю и лавочнику. Дочь Возчикова пела песни своему жениху. Лавочников, который все еще оставался холостяком, сменил тезку своей профессии в качестве начальника пожарников. Кузнецов имел огород вместе со своим зятем. Отец лавочника был братом жены Пекарева. Тот, кто был колбасником, женился на сестре колбасника. Никто из них не имел больше одной дочери, а двое имели по одной. Тот, кто был колбасником, был тезкой профессии тезки профессии Возчикова, между тем как возчик был тезкой профессии тезки профессии Кузнецова. Определите у каждого его профессию и фамилию.

6. Убийство в лондонском метро

Расписание последнего ночного поезда лондонского метро на линии Чаринг-Кросс — Бейкер Стрит следующее:

	Прибытие	Отправление
Чаринг-Кросс	—	0,17
Трафальгар Сквер . . .	0,18	0,20
Пикадилли	0,22	0,24
Оксфорд Серкес	0,25	0,27
Риджентс Парк	0,29	0,30
Бейкер Стрит	0,32	—

Вожак шайки Зукко был найден мертвым в поезде, который прибыл в Бейкер Стрит в 0.32. Его сердце было проколото, и врачебная экспертиза установила, что он скончался «почти мгновенно», не больше чем четверть часа назад. Скотланд Ярд уверен, что убийство совершил один из следующих членов шайки: Бутто, Спагетти, Макарони или Замбалионе. Детектив Брайт, которому поручили расследование, установил о подозреваемых следующее.

1. Бутто находился вскоре после 0.18 в Олдгейт (см. план), где поинтересовался точным временем у постового. Полицейский «почти уверен», что это был именно Бутто.

2. Спагетти вышел в 0.15 в Чаринг-Кросс из поезда и пошел пешком до Трафальгар Сквер, где в 0.25 сел в

автобус № 13, идущий до Бейкер Стрит. Между 0.16 и 0.20 он разговаривал с двумя друзьями на Норсумберленд Эвеню.

3. Макарони купил в 0.19 на станции Трафальгар Сквер билет до Риджентс Парк. Так как Скотланд Ярд его давно разыскивал, за ним следил детектив Шарп. Тот заметил, как он покупал билет, но ехал с ним в поезде и арестовал Макарони на станции Риджентс Парк. Одна-

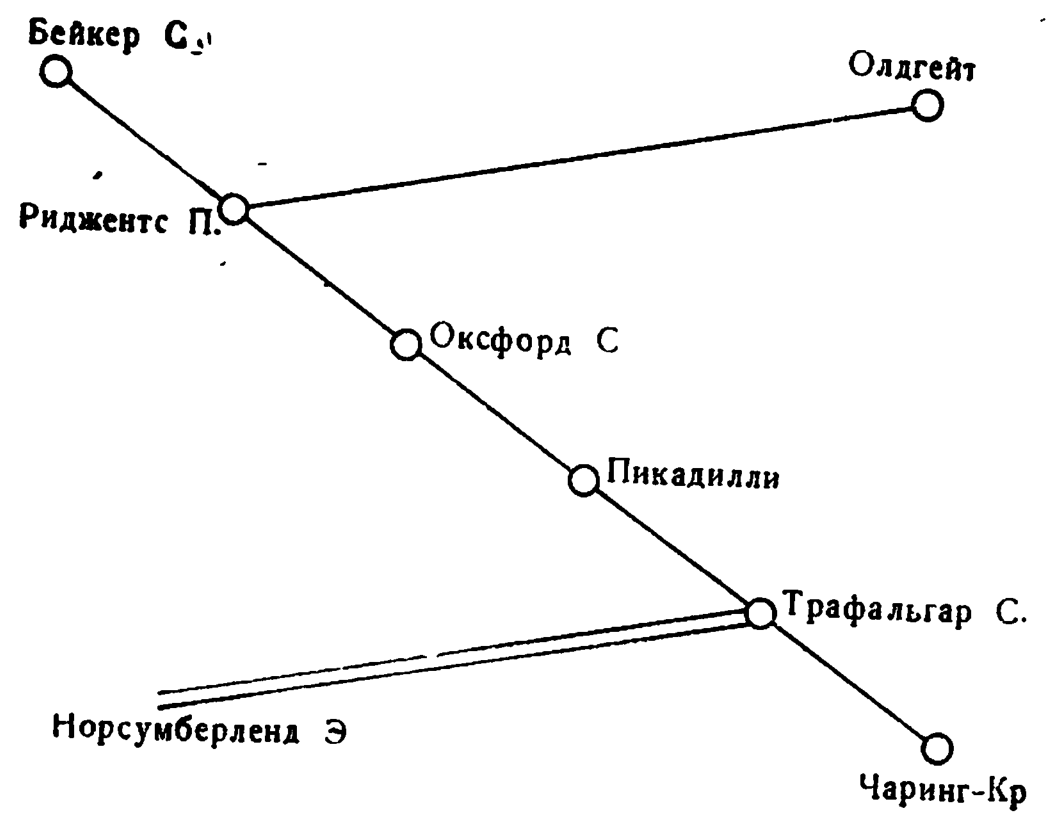


Рис. 1. План местности

ко Шарп готов засвидетельствовать под присягой, что это не был поезд, который выезжает из Трафальгар Сквер в 0.20, это был следующий, отправляющийся оттуда в 0.23.

4. Замбалионе видели вместе с Зукко в ресторане Кианти близ Пикадилли. Оба были явно в плохом настроении. После этого их видели на станции Пикадилли, «около 0.10», когда Зукко купил два билета в Риджентс Парк. Однако Замбалионе утверждает, что в последний момент он решил не ехать вместе с Зукко, а вернуться в ресторан; в самом деле, трое свидетелей подтверждают, что его там видели между 0.20 и 0.25.

Кто убил Зукко и при каких обстоятельствах?

Б. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ СРЕДСТВАМИ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

7. Автоматический сортировщик топлива

На склад, имеющий два помещения для хранения больших количеств двух видов топлива — угля и кокса, каждого отдельно, поступают грузовики, каждый всякий раз с одним из этих видов топлива. К механизму, открывающему шахты, предъявляется требование, чтобы он открыл шахту в помещение для угля, если прибывает грузовик с этим топливом, и шахту в помещение для кокса, если прибывает грузовик с коксом. Для обеспечения хорошей сортировки топлива было предъявлено дополнительное требование: всякий раз в помещение склада впускается только один грузовик и открывается лишь одна шахта.

Спрашивается, имеет ли этот механизм также следующее свойство: если не въехал в помещение склада грузовик с углем, то шахта для угля не откроется, а если не въехал грузовик с коксом, то не откроется шахта для кокса.

Примечание. Эту задачу можно решить и без средств логики высказываний, простым рассуждением. Более трудным, а возможно, и умозрительно неосуществимым окажется решение в случае, когда количество видов топлива превышает два и когда на склад может одновременно въезжать несколько грузовиков. Пусть читатель попытается решить эту задачу также для трех видов топлива.

8. Туземцы и колониалисты

Перед судом стоят три человека, из которых каждый может быть либо туземцем, либо колониалистом. Судья знает, что туземцы всегда отвечают на вопросы правдиво, между тем как колониалисты всегда лгут. Однако судья не знает, кто из них туземец, а кто — колониалист. Он спрашивает первого, но не понимает его ответа. Поэтому он спрашивает сначала второго, а потом третьего о том, что ответил первый. Второй говорит, что первый говорил, что он туземец. Третий говорит, что первый назвал себя колониалистом. Кем были второй и третий подсудимые?

9. Два племени

На острове живут два племени; молодцы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник встретил туземца, спросил его, кто он такой, и, когда услышал, что он из племени молодцов, нанял его в услужение. Они пошли и увидели вдали другого туземца, и путешественник послал своего слугу спросить его, к какому племени он принадлежит. Слуга вернулся и сказал, что тот утверждает, что он из племени молодцов. Спрашивается, был ли слуга молодцом или же лгуном.

10. Порядок утверждения проектов

На предприятии есть три цеха: *A, B, C,* договорившиеся о порядке утверждения проектов, а именно.

1. Если цех *B* не участвует в утверждении проекта, то в этом утверждении не участвует и цех *A*.

2. Если цех *B* принимает участие в утверждении проекта, то в нем принимают участие цеха *A* и *C*.

Спрашивается, обязан ли при этих условиях цех *C* принимать участие в утверждении проекта, когда в нем принимает участие цех *A*?

11. Разбитое окно. Первый вариант

В перерыве в классе осталось 15 учащихся. В это время там разбили окно. Учитель записал высказывания отдельных учащихся.

Аня. Я этого не делала; сделал это Борис.

Борис. Да, я его разбил.

Ваня. Он лжет, это сделал Закир.

Даша. Нет, это не так, но я этого также не делала.
Ева. Это сделала либо Катя, либо Аня, но не я.
Закир. Окно разбила одна из девочек.
Женя. Ничуть, его разбили мальчики.
Соня. Это мы сделали с Аней.
Ира. Я видела, как его разбил один из мальчиков, но не помню кто.
Яша. Борис говорит неправду, окно разбил я.
Катя. Я в этом не участвовала, Аня это сделала одна.
Лева. Яша сказал правду.
Маня. Лева врет, окно разбилось само от ветра.
Надя. Я читала книгу и ничего не знаю.
Роза. Это сделала Аня.

Если один и только один из учащихся говорил правду, кто разбил окно?

12. Разбитое окно. Второй вариант

Во время перемены были в классе Аня, Борис, Ваня и Маня. Один из них разбил окно. Учитель стал их спрашивать и получил от каждого три ответа.

Аня. 1) Я его не разбивала. 2) Я сидела и читала. 3) Маня знает, кто разбил.

Борис. 1) Я этого не делал. 2) С Маней я давно не разговариваю. 3) Это сделал Ваня.

Ваня. 1) Я невиновен. 2) Разбила Маня. 3) Борис лжет, говоря, что разбил я.

Маня. 1) Я не разбивала окна. 2) Это вина Ани. 3) Борис знает, что я не виновата, потому что мы с ним беседовали во время перемены.

В конце концов каждый из них признался, что из трех ответов, которые он дал, два истинны, а один ложен. Кто разбил окно?

13. Разбитое окно. Третий вариант

В перерыве в классе оставалось девять учеников. Один из них разбил окно. На вопрос учителя были получены следующие ответы.

Яша. Это сделал Владик.
Борис. Это неправда.
Маня. Я его разбила.
Ваня. Сделала это либо Маня, либо Аня.
Владик. Борис лжет.
Степа. Это сделала Маня.

Леня. Нет, Маня окно не разбивала.

Аня. Ни Маня, ни я этого не делали.

Роза. Аня права, но Владик также не виновен.

Если из этих девяти показаний истинны только три, то кто разбил окно?

14. Рассеянный профессор

Профессор Икс Игрекович Зет был, как известно, так же учен, как и рассеян. У него была большая библиотека, которая помещалась в трех комнатах. В первой были справочники, во второй — труды по его специальности, в третьей — научные журналы. Когда он писал свой знаменитый труд «О бессмертии майских жуков», у него на письменном столе царил невероятный хаос, и он не мог найти трех вещей: словарь эскимосского языка, учебник носологии и памфлет своего заклятого противника доктора Болтунова. Профессор страшно взволновался и обвинил лаборанта, что тот, по-видимому, поставил словарь где-то среди трудов, а учебник и памфлет — среди журналов. Лаборант отрицал это и говорил, что профессор, как всегда, бросил все эти три вещи куда-нибудь на полку в первой комнате. А супруга профессора высказала предположение, что словарь, вероятно, находится среди журналов, а учебник и памфлет — среди трудов. Каждый настаивал на своем, началась бурная перебранка. Дочь профессора, слушавшая это, сказала: «Все, что вы утверждаете, неверно». Если она была права, куда затерялись эти вещи?

15. Договорные начала

Согласно договоренности, порядок утверждения нового проекта, в разработке которого участвуют учреждения *А*, *Б*, *В*, таков: если в утверждении принимают сначала участие учреждения *А* и *Б*, то должно присоединиться к участию и учреждение *В*. Если утверждение происходит сначала в учреждениях *Б* и *В*, присоединяется и учреждение *А*. Спрашивается, возможны ли такие случаи при утверждении проекта, когда принимали бы в нём участие только учреждения *А* и *В*, между тем как участие учреждения *Б* не было бы необходимо (при сохранении договоренности о порядке утверждения проектов)?

16. Турист. Первый вариант

Турист шел к озеру. Он дошел до перекрестка, откуда вела одна дорога вправо, а другая — влево; одна шла к озеру, другая — нет. На перекрестке сидело двое парней, один из них всегда говорил правду, второй всегда лгал. Оба они отвечали на любой вопрос, либо «да», либо «нет». Все это было туристу известно, но он не знал, кто из них говорит правду, кто лжет; он также не знал, какая из дорог ведет к озеру. Тогда он поставил обоим сразу один вопрос, каждый из них дал на него свой ответ. Спрашивается, какой это был вопрос, раз турист по полученным ответам безошибочно решил, какая из дорог ведет к озеру?

17. Турист. Второй вариант

Турист поставил одному из парней два вопроса. Какие это были вопросы, раз он по ответам на них узнал, какая дорога ведет к озеру?

18. Турист. Третий вариант

Турист поставил лишь один вопрос одному из парней. Какой это был вопрос, раз он узнал по ответу, какая дорога ведет к озеру?

19. Правитель острова

Самодержавный правитель одного острова хотел воспрепятствовать тому, чтобы на острове поселились пришельцы. Желая соблюсти видимость справедливости, он издал распоряжение, согласно которому всякий, желающий поселиться на острове, должен, хорошо поразмыслив, высказать любое предложение, причем после предварительного предупреждения, что от содержания этого предложения зависит его жизнь.

Распоряжение гласило: «Если пришелец скажет правду, его расстреляют. Если он скажет неправду, его повесят». Может ли пришелец, став жителем острова, сохранить свою жизнь?

20. Утюг с автоматическим выключателем

Попытайтесь описать логические условия, выражающие деятельность контакта, включающего утюг, в связи

с контактом, предохраняющим утюг от перегрева, и в связи с состоянием отопительной спирали, т. е. выяснить, какие из состояний этих трех частей утюга — включение или невключение контакта, включение или невключение предохранителя, перегрев или неперегрев спирали — совместимы друг с другом, а какие из состояний не совместимы друг с другом.

B. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ СРЕДСТВАМИ ЛОГИКИ КЛАССОВ

А. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

21. Злоумышленники

Пятерых человек подозревали в подготовке аварии на железной дороге. Адская машина, которую кто-то из них установил на путях, была вовремя обнаружена, и все пять человек были арестованы. Полиция сосредоточила свое внимание на тех из них, которые непосредственно участвовали в установке адской машины на путях. Расследование установило, что *А* видели только при двух обстоятельствах: либо вместе с *Б*, либо вместе с *В*, причем не было надежно установлено, не присутствовал ли при этих встречах еще кто-либо другой из этих пяти. *Г* видели несколько раз в присутствии *Б* и *В*. В тех случаях, когда эти лица с ним не встречались, заходил к *Г* некий *Д*. Исследуя часовой механизм адской машины, эксперты установили, что при его установке на путях должен был присутствовать *А*. Это было установлено полицией на основании сравнения времени встреч этих лиц, которое она всякий раз засекала. Может ли кто-нибудь один из этих пяти лиц доказать, что он не присутствовал при установке адской машины на путях? Может ли таких лиц быть больше?

22. Правильный или неправильный вывод?

Если мы скажем кому-нибудь, что некоторые музыканты не являются учителями, то он легко придет к выводу, что некоторые учителя не являются музыкантами.

Равным образом, если мы скажем, что некоторые алюминиевые детали машин нельзя применить там, где они подвергались бы высокому давлению, то легко сделаем отсюда вывод, что имеются такие детали машин, которые не сделаны из алюминия. Можно ли подобный способ вывода, если он вообще правилен, обобщить и при каких условиях? Рассмотрите следующий пример. Некоторые процессы мышления не являются суждениями. Если бы мы действовали так же, как в предыдущих двух примерах, то выяснили бы, что некоторые суждения не являются процессами мышления, что явно неверно. В чем же дело?

23. Два объявления

Так как на территории строящейся плотины имеется несколько населенных мест, жители которых должны быть переселены, было издано объявление, извещающее об этом жителей. Объявление гласило:

«Селения, которые выселяются и перемещаются (в область вне плотины) в установленные места, находятся в области будущей плотины».

Так как это объявление не было понятно многим гражданам, его дополнили другим, которое должно было пояснить первое. Оно гласило:

«Селения, которые не выселяются, не находятся в области будущей плотины. Селения, которые не перемещаются, не предназначены к выселению».

Говорят ли оба объявления одно и то же, или хотя бы отчасти одно и то же, т. е. имеют ли они одинаковый смысл?

24. Фотография старинного замка

Развалины старинного замка трудно доступны для фотографирования. В их ближайшей окрестности находятся группа мощных деревьев и современная гостиница. Нас предупредили, что развалины мы не увидим оттуда, откуда можно увидеть деревья и гостиницу, а также не увидим в том направлении, откуда видны деревья и разрушенные ворота укрепления, находящиеся недалеко от замка. Мы сами убедились, что в том направлении, где не видны ни гостиница, ни деревья, не видны и

ворота, да и сам замок закрыт близким холмом. Положим, что другой информации получить нельзя. Сколько видов фотографий с замком существует? Можно ли получить фотографии, на которых были бы вместе замок и ворота?

25. Собаки лесничего

Лесничий тренирует шестерых охотничьих собак разной породы. Однажды он посвятил час их тренировке. Сначала он тренировал всех, т. е. Алика, Бобика, Цезаря, Дракона, Рекса и Тузика. Потом он отпустил Рекса и Тузика и занимался лишь остальными. Так как Алик, Бобик и Цезарь не очень преуспевали, он вскоре присоединил к ним Тузика, а две опять убежали. После этого он занимался некоторое время лишь своим любимцем Тузиком, между тем как другие собаки бегали в саду лесничества. После занятий с Тузиком он начал особо тренировать Алика, Бобика и Дракона. Но эту особую тренировку он хотел еще испытать на Рексе, к которому присоединил Бобика и Дракона для того, чтобы Рекс мог подражать им. Однако Рекс быстро усвоил упражнение и ему разрешили удалиться раньше, между тем как Бобик и Дракон еще тренировались. Во время строгой тренировки этих еще молодых собак исчезло из погреба мясо для ужина. Ясно, что никто, кроме собак, не мог его стащить. Жена лесничего с интересом наблюдала за тренировкой и утверждала, что мясо могли стащить лишь тогда, когда среди тренируемых собак был Тузик, потому что она смотрела все время почти только на него. Рекса она видела гоняющимся за кошкой далеко от дома. Странным во всей этой истории было то, что собаки были почти постоянно на глазах, и, чтобы сожрать мясо, собаке потребовалось бы довольно много времени. Ясно также, что этого не могли сделать сразу несколько собак, потому что они, затеяв драку, привлекли бы к себе внимание. Лесничий решил, что он должен во что бы то ни стало выяснить, какая из собак съела мясо, для того чтобы ничего не упустить при ее тренировке. После ужина он погрузился в глубокое раздумье. Утром же сказал, что возьмет с собой в обход только Дракона, чтобы как следует проучить его, и обещал удивленной жене, что он объяснит ей, когда вернется с обхода, как он доискался истины. В самом деле, как он выяснил это?

26. Карта и дороги

Автомобилист, имеющий карту района, где находятся селения *А*, *Б*, *В* и *Г*, желал посетить их все. Согласно карте, на дорогах, проходящих через *Б* и не проходящих через *Г*, лежат либо оба селения *А* и *В*, либо не лежит ни одно из них. Но так как автомобилист узнал, что в этом районе чинят дороги, он спросил встретившихся ему ребят, в каком состоянии дороги в районе. Он узнал, что ни по дорогам, которые проходят через селение *В*, ни по дорогам, проходящим через *Г*, нельзя в настоящее время проехать в селения *А* и *Б*. Можно ли, согласно этой информации, проехать сразу через все названные селения? Если это невозможно, то по какой дороге можно проехать через наибольшее число селений?

27. Добросовестные работники

Встретились два друга. Первый сказал второму: «На основании многолетнего опыта мне известно, что все, кто работал в этом цехе, работал на совесть». Второй на это заметил: «Это то же самое, как если бы ты сказал, что все, кто не работал на совесть, работал в других цехах». Первый утверждает, что это не то́ же самое, что он сказал нечто друго́е, чем его друг. Решите, кто был прав.

28. Сообщение о лекции

В популярной лекции лектор сказал: «Количество железа в нашем организме незначительно, однако это железо совершенно необходимо для поддержания жизни». В местной газете было помещено сообщение о лекции, и в нем упомянутое предложение было передано так: «Незначительное количество железа, содержащееся в нашем организме, это то железо, которое совершенно необходимо для поддержания жизни». Имеют ли оба предложения одинаковый смысл?

29. У телевизора

Семья состоит из отца Алексея, матери Веры и трех детей: Глеба, Даши и Жени. Обстоятельства, которые складываются в семье при просмотре телевизионной передачи, таковы. 1) Если смотрит Алексей, смотрит и его жена. 2) Смотрят либо Даша, либо Женя, либо обе

вместе. 3) Смотрят либо Вера, либо Глеб, но никогда они не смотрят оба вместе. 4) Даша и Глеб всегда либо смотрят вместе, либо не смотрят вовсе. 5) Если смотрит Женя, то смотрят и Алексей, и Даша. Кто при этих условиях смотрит телевизионную передачу?

30. Военный флот

Еще до середины прошлого века не все суда морских держав были металлическими и работали паровыми двигателями. Даже и в военных флотах оставались большие деревянные корабли, фрегаты и другие небольшие деревянные и парусные суда. Об этом свидетельствует и история Крымской войны, в которой участвовали флоты России, Франции, Англии и Турции. В определенный период этого времени было известно, что английский военный паровой флот состоит из военных кораблей, находящихся в Средиземном море, и из паровых судов, находящихся вне Средиземного моря. К чему должен был быть готов командир флота государства, бывшего в военном конфликте с Англией, при встрече английского парового судна вне Средиземного моря? И где он мог единственно встретить невооруженные английские паровые судна, которые его военные корабли могли бы захватить?

31. Капитан и рулевой

Если, согласно инструкции, капитан должен находиться на судне всегда, за исключением случаев, когда с судна выгружают груз, и если в тех случаях, когда груз не выгружают, рулевой никогда не отсутствует, если не отсутствует также и капитан, что можно утверждать о присутствии и об отсутствии рулевого на судне?

32. Грудные дети (задача-шутка)

Даны утверждения. 1) Грудные дети нелогичны. 2) Мы не презираем никого, кто не способен справиться с крокодилом. 3) Мы презираем тех, кто нелогичен. Докажите, что из этих утверждений следует вывод: «Грудные дети неспособны справиться с крокодилом».

33. Рыбы (задача-шутка)

1) Ни одна акула не сомневается в том, что она хорошо вооружена. 2) Рыба, которая не умеет танцевать

кадриль, заслуживает сострадания. 3) Ни одна рыба не уверена в своем вооружении, если она не имеет хотя бы три ряда зубов. 4) Все рыбы, за исключением акул, ласковы с детьми. 5) Тяжелые рыбы не умеют танцевать кадриль. 6) Рыба, имеющая три ряда зубов, не заслуживает сострадания. Оцените правильность вывода: «Тяжелые рыбы не являются неласковыми с детьми».

Б. ЗАДАЧИ С ТЕХНИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

34. Цветные флажки

Двое друзей гуляют по дороге, имеющей форму окружности. Недалеко от центра этой окружности стоят четыре шеста одинаковой высоты с флажками одинаковой величины, но различных цветов. Радиус окружности довольно большой. Друзья поставили перед собой задачу — определить при помощи одного лишь наблюдения за флажками, какую геометрическую фигуру образуют точки, в которых поставлены шесты. Когда друзья обошли весь периметр окружности, они подвели итог своим наблюдениям в следующих предложениях: «Когда виден красный флажок, виден одновременно еще желтый и зеленый, или же не виден зеленый, но зато виден синий. Однако существует и такой случай, когда не виден красный флажок, но тогда не виден и желтый, но зато одновременно видны зеленый и синий». При всем этом принимается во внимание, как это друзья установили, что флажки, наблюдаемые из некоторых мест, перекрывают друг друга. Какую геометрическую фигуру образовали точки, в которых были поставлены шесты?

35. Четырехгранная призма

Четырехгранная прямая призма, грани которой обозначим через *А*, *Б*, *В*, *Г*, стоит своим основанием на столе и мы вращаем ее. Мы установили, что если прямо перед нами грань *А*, то видны еще и грани *Б* и *Г*. Если прямо перед нами находится грань *В*, то нельзя увидеть ни одну из остальных граней. Наконец, если мы видим в любом положении одновременно грани *Г* и *Б*, то видим всегда также и *А*. Какова форма основания, если она выпуклый четырехугольник? (Выпуклый четырехугольник обладает

тем свойством, что отрезок, соединяющий любые две точки, лежащие внутри четырехугольника, лежит целиком внутри области, ограниченной сторонами четырехугольника).

36. Рычаг и кнопка

Машина имеет рычаг управления и предохраняющую кнопку. В машине встречаются два вида перебоев: она вибрирует и искрит. В течение одной минуты каждый из этих перебоев либо имеет место, либо нет, переходы не существуют. Поведение машины в данную минуту зависит единственно от ее состояния в предыдущую минуту, а именно: машина вибрирует, если вибрировала в предыдущую минуту (и не вибрирует, если в предыдущую минуту не вибрировала), при условии, если, когда она не искрила, рычаг не был включен. Но если рычаг был включен и машина вибрировала, то теперь вибрировать не станет, и, наоборот, если не вибрировала (при включенном рычаге), то теперь будет вибрировать. Далее, если в предыдущую минуту кнопка была нажата, машина будет или же не будет теперь искрить в зависимости от того, вибрировала ли она или нет. Но если кнопка не была нажата, машина будет искрить, если не вибрировала, и не будет искрить, если вибрировала. Как раз в данную минуту машина одновременно вибрирует и искрит. Что делать с рычагом и кнопкой, чтобы оба перебоя перестали в следующую минуту действовать?

37. Уравнения для букв

Перед нами шахматная доска; все поля которой белые. Закрасим некоторые поля так, чтобы (как указано на чертеже) возникли фигуры, образующие форму букв *В*, *М* и *Т*. Можно ли составить логические уравне-

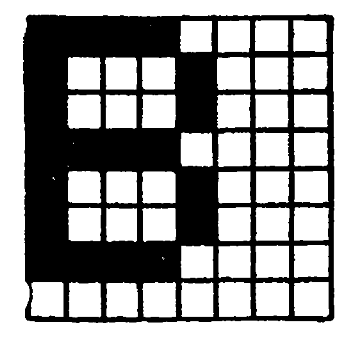
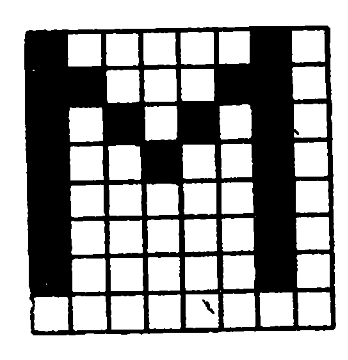
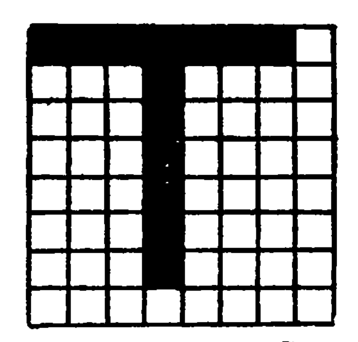




Рис. 2

ния, выражающие для данных букв, какие поля закрашены и какие нет? (Указание. Примите во внимание, что шахматная доска имеет 64 поля, которые можно закрасить 64 сочетаниями выражений *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*, *Е* — число этих сочетаний как раз равно $2^6=64$).

38. Сигнальная установка

Сигнальная установка имеет три лампочки: красную, зеленую и желтую. Мы можем наблюдать, как зажигаются и гаснут эти лампочки, но нам ничего неизвестно о связи между этими световыми сигналами. Длительное наблюдение за установкой выявило лишь следующие сочетания: 1) светят красная с желтой и зеленой; 2) светят красная с желтой; 3) светят зеленая с желтой; 4) светит одна лишь зеленая; 5) светит одна только желтая. Можно ли из этих данных получить информацию о внутренних связях сигнальной установки, приводящих во взаимодействие отдельные световые сигналы? Если это возможно, то что́ можно сказать о свойствах электрической сети, находящейся внутри установки, не заглядывая в нее?

39. Семафоры и стрелки

От главного пути *А*, по которому поезда ходят в обоих направлениях, как указано на рисунке, отходит ветка *Б*, по которой поезда также ходят в обоих направлениях. Нормальное положение стрелок $В_1$ и $В_2$ таково, что возможно движение по линии *А*. В случае, что из $В_2$ отходит поезд на линию *Б*, или же в случае, что к $В_1$ подъезжает поезд из линии *Б*, стрелка переставлена. Семафоры $Г_1$ и $Г_2$ имеют лишь два положения: «стой» и «путь свободен». Каковы взаимные отношения положений стрелок и состояний семафоров, обеспечивающие безопасность движения на данном участке? Запишите эти условия.

40. Три машины. Первый вариант

а. Агрегат, состоящий из трех машин *А*, *Б*, *В*, имеет следующие условия функционирования: 1) всегда, когда работает машина *А*, работает также машина *Б*; 2) и всегда, когда работает машина *Б*, работает также машина *В*. По требованиям безопасности необходимо,

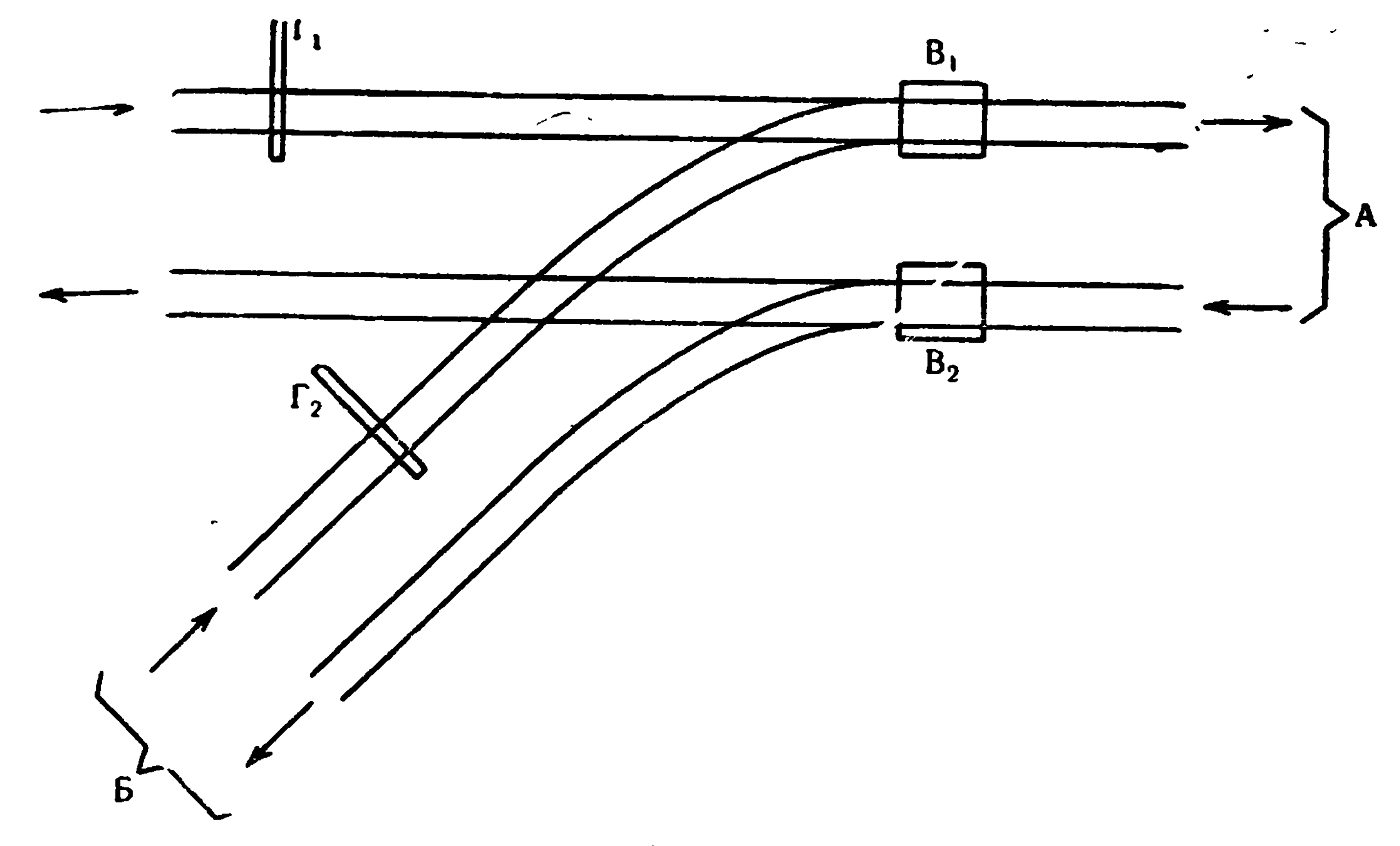


Рис. 3

чтобы в том случае, когда откажет машина *А*, не работала и машина *В*. Как удовлетворить это требование?

б. При тех же условиях 1) и 2) как в *а*, машина *В* должна быть запасной, она должна работать и тогда, когда не работает машина *А*. Что можно сказать о работе машины *В*? Может ли машина *Б* работать одна?

41. Три машины. Второй вариант

В заводском цеху имеются три мотора, о которых известно, что они работают при следующих условиях: либо работают первый мотор и второй, либо второй и третий, либо первый и третий. Но так как производство нуждается главным образом в первом и втором моторах, третий мотор работает лишь тогда, когда первый или второй находится в ремонте или когда их чистят, т. е. работает лишь небольшое время. Спрашивается, каковы условия действия или бездействия третьего мотора, а также, может ли какой-нибудь из них работать отдельно и могут ли работать одновременно все три?

42. Производство и контроль качества

Автомат обслуживает непрерывное производство винтов, которые перед упаковкой подвергаются двойному контролю. Один касается качества материала, а второй, не зависящий от первого,— точности обработки. Что можно было бы сказать о деятельности автомата, если бы

контроль не обнаружил ни винтов из плохого материала, хорошо обработанных, ни винтов плохо обработанных из хорошего материала? И что можно было бы сказать о том же автомате, если бы контроль установил, что вообще не встречаются лишь винты из плохого материала, но хорошо обработанные?

43. Производственная линия

Пять машин, обслуживающих производственную линию, работают под контролем автомата, который вмешивается в производственный процесс в случае, если какая-нибудь из машин откажет. Машины связаны таким образом друг с другом, что если первая работает хорошо, то и вторая хорошо работает. То же относится и к паре — вторая и третья машина, к паре — третья и четвертая, и наконец, к паре — четвертая и пятая. Что произойдет, если: 1) откажет четвертая машина; 2) откажет последняя машина; 3) откажет вторая; 4) откажет первая?

44. Передача сообщений

Устройство, передающее сообщения, использует алфавит, состоящий из пяти букв: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. «Слово» такого сообщения — это последовательность пяти знаков, взятых из этого алфавита в указанной последовательности, причем какой-нибудь из знаков (но, может быть, и несколько, а то и все) может быть заменен символом *x*. Таким образом, «словами» являются, например, не только *ABCDE*, но и *AxCDE*, *xxCDE*, *xBCxE* и т. д. Однако в передающем устройстве произошло повреждение. Установлено, что передача буквы *D* влияет столь неблагоприятно на появление букв *B* и *C* в приемнике, что их прием в 50% случаев ненадежен. Но эти неблагоприятные случаи встречались лишь тогда, когда слово содержало букву *D*, но не содержало букву *E*, или же, хотя и содержало ее, но обязательно вместе с буквой *A*.

Оказалось, что и при этом недостатке аппаратуры можно передавать важные сообщения, если только исключить слова, прием которых, вследствие указанного дефекта, ненадежен. Определите, какие слова необходимо исключить и какие слова допустимы, т. е. прием которых надежен.

B. ЗАДАЧИ С ЭЛЕМЕНТАМИ АРИФМЕТИКИ

45. Депутаты и военные

Если вычесть из числа депутатов Совета число тех депутатов, которые не являются военными, то получим тот же результат, как если от числа всех военных вычесть число тех военных, которые не являются депутатами Совета. Докажите это!

46. Международная конференция

На международной конференции встретились специалисты-химики, всего e человек. Каждый из них говорил по меньшей мере на одном из языков: английском, французском и русском, однако, среди них не было ни одного, который говорил бы одновременно и по-английски, и по-французски. Лиц, говорящих по-английски, было a, тех, кто говорил по-французски, было b, а говорящих по-русски было c. Среди участников были и говорящие лишь на одном из этих языков, их число было равно d. Оказалось, что случайно сумма $a+b$ была равна сумме $c+d$. Спрашивается, сколько участников конференции говорит только по-русски и скольким участникам конференции пришлось переводить доклады, произнесенные по-русски?

47. Исследование операций по обслуживанию населения

В городском районе имеются две прачечные. В определенную неделю услугами первой пользовались 562 человека, а услугами второй — 474. Исследование операций по обслуживанию установило, что 435 человек пользовались исключительно только услугами второй прачечной. Можно ли на основании этих данных установить, сколько человек пользовалось в эту неделю только услугами первой прачечной?

48. Переводчики

В дни музыкального фестиваля в город приехали незваные иностранные гости, говорящие по-испански. Организаторы фестиваля обратились в переводческий центр с просьбой прислать переводчиков. На вопрос по телефону последовал ответ, что переводчики, владеющие романскими языками, есть, но, к несчастью, один из ра-

ботников управления заболел, а у него как раз хранится ключ от стола, в котором находится картотека этих переводчиков. Но оказалось, что руководитель переводческого центра имел для себя лично список переводчиков, владеющих хотя бы одним из двух языков: французским или испанским. Их было всего 20 человек. Тех, кто говорил по-французски, было 8, а тех, кто говорил лишь на одном из этих языков, было 15. Организаторам фестиваля надо было немедленно знать, сколько переводчиков с испанского им могут прислать из центра. Через несколько минут руководитель центра сообщил им это. Сколько их было и каким путем он установил это, если картотека все еще находилась в запертом письменном столе?

49. Продовольственные запасы

Продовольственные запасы географической экспедиции состоят из консервов и другой пищи. Консервы образуют две трети всех запасов. Однако предварительный контроль установил, что две трети всех запасов испорчены. Можно ли на основании этого сказать, какая часть консервов была наверняка испорчена?

50. Число неизвестных предметов

Некоторые предметы, обладающие свойством X, обладают также свойством Y. С каждым предметом со свойством X сопоставлен предмет, лишенный свойств Y и Z. Докажите, что существуют предметы, лишенные свойств X и Z. Эта задача станет интереснее, если поставить дополнительный вопрос, каково наименьшее число предметов, лишенных свойств X и Z?

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

Решение задач. Теория

А. ЗАДАЧИ, РЕШЕННЫЕ БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1. Книги и профессии

Решение осуществимо при помощи таблицы, составленной в результате рассуждений об отношениях между фамилией, профессией и одолженной книгой. Начнем с третьего условия задачи: «Сын кузнеца взял книгу Кузнецова; он же — тезка профессии сына Кузнецова и одновременно тезка того, чью книгу взял сын Кузнецова». Отсюда и из того, что сын кузнеца не может иметь двух фамилий, следует, что он имеет, во-первых, фамилию по названию профессии сына Кузнецова; во-вторых, фамилию своего отца, у которого одолжил книгу сын Кузнецова. (Эти два вывода обозначим через *B*). Из последнего условия задачи следует, что плотник $\neq$ Столяровым (знак $\neq$ обозначает «не является»), из второго условия задачи следует, что плотник $\neq$ Плотниковым, а так как, согласно предпоследнему условию задачи, плотник взял книгу Шорникова, а значит, книгу друга своего отца, чью фамилию он не может сам иметь, то получаем, что плотник $\neq$ Шорниковым. Следовательно, плотник может иметь либо фамилию Кузнецов, либо Трубочистов.

Выясним, какое из этих двух предположений истинно. Допустим, что плотник $\neq$ Кузнецовым. Тогда, согласно третьему условию задачи, сын кузнеца взял книгу Кузнецова, т. е. книгу плотника, а значит фамилия сына кузнеца Плотников, и у его отца — Плотникова (см. вы-

воды B) — одолжил книгу сын Кузнецова, т. е. плотник. Однако, согласно предпоследнему условию задачи, плотник должен взять книгу Шорникова. Таким образом, мы пришли к противоречию, так как каждый из сыновей одолжил книгу лишь у одного из друзей своего отца. Значит, плотник может иметь только фамилию Трубочистов, что и запишем в таблицу.

Во второй части решения станем искать фамилию сына кузнеца. 1) Сын кузнеца≠Кузнецовым (согласно условию задачи). 2) Допустим, что сын кузнеца=Плотникову; тогда, согласно третьему условию задачи, сын Кузнецова=плотнику и сын Кузнецова одолжил книгу у Плотникова, т. е. отца сына кузнеца. Но плотник, т. е. сын Кузнецова, должен взять книгу, одолженную у Шорникова. Следовательно, мы пришли к противоречию. 3) Допустим тогда, что сын кузнеца=Столярову; тогда сын Кузнецова=столяру, и сын Кузнецова одолжил книгу у сына кузнеца, т. е. у Столярова. Это возможно. 4) Допустим, что сын кузнецова=Шорникову; тогда сын Кузнецова=шорнику и взял книгу отца кузнеца, т. е. Шорникова. Однако, согласно условию задачи, книгу Шорникова взял плотник, и следовательно, мы опять пришли к противоречию. 5) Предположение, что сын кузнеца=трубочисту, противоречит результату первой части решения, согласно которому Трубочистов=плотнику, а не кузнецу.

Таким образом, мы получили, что фамилия сына кузнеца (как и самого кузнеца) Столяров, а Кузнецов является столяром. Это мы запишем в таблицу. Теперь для Плотникова и Шорникова остались профессии шорника и трубочиста. Однако Шорников не может быть шорником (согласно условию задачи), следовательно, он трубочист. Итак, фамилия трубочиста Шорников, это и ответ на поставленный вопрос.

Фамилии . . .	Кузнецов	Плотников	Столяров	Шорников	Трубочистов
Профессии . . .	Столяр	Шорник	Кузнец	Трубочист	Плотник
Одолживший книгу . . .	Кузнец		Столяр	Плотник	

(Эту же задачу можно решить с помощью исчисления отношений, которое, однако, в этой книге не излагается).

2. Профессор Кукушка

Введем обозначения: *Ф* — француз, *Н* — немец, *И* — итальянец, *С* — испанец, *Г* — голландец, *Д* — датчанин, *Ч* — чех. Письма, которые они должны были получить на своем родном языке, обозначим соответственно: *ф*, *н*, *и*, *с*, *г*, *д*, *ч*, между тем как научные монографии, которые им предназначались, обозначим соответственно: *ф'*, *н'*, *и'*, *с'*, *г'*, *д'*, *ч'*.

Составим таблицу:

	Ф	*Н*	*И*	*С*	*Г*	*Д*	*Ч*	
ф		*п*					*м*	*ф'*
н			*п*	*М*				*н'*
и	*п*	*М*						*и'*
с			*М*		*п*			*с'*
г	*м*					*П*		*г'*
д					*м*		*п*	*д'*
ч				*П*		*м*		*ч'*

В таблицу мы записали все, что нам было известно, причем буквой *п* мы обозначили полученное письмо, а буквой *м* — полученную монографию. Очевидно, что каждая строка и каждый столбец должны содержать по одному *п* и по одному *м* и что *п* и *м* не могут быть в одной клетке. Поэтому недостающие *п* должны находиться в клетках (*Д*, *г*) и (*С*, *ч*) и мы впишем их в таблицу; но, поскольку они не были даны, обозначим их буквой *П*. Что же касается недостающих *м*, то их следует искать в клетках, определенных *Н*, *И*, *С* и *н'*, *и'*, *с'*. Все эти клетки находятся в большой клетке, обведенной жирной рамкой.

Так как *Н* не может быть вместе с *н'* и так как клетка (*И*, *н'*) уже занята, то одно *м* (которое обозначим *М*, потому что оно не было дано) должно быть в клетке (*С*, *н'*), откуда следует, что *И* соединено с *с'*, а *Н* с *и*, как показывают знаки *М* в соответствующих клетках. Зна-

чит, итальянец Кукуло получил монографию, предназначавшуюся для испанца Кукило, который получил чешское письмо.

3. Сплав

Напишем таблицу с тремя входами, которые обозначим буквами $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ — для наибольшей, средней и наименьшей доли металла в сплаве соответственно. Столбцы таблицы содержат все шесть возможных перестановок; в которых металлы могли бы содержаться в сплаве в отношении своей весовой доли. При этом обозначают *З* — золото, *С* — серебро, *М* — медь, а цифра 0, следующая за знаком металла, обозначает, что, согласно условиям 1) и 2) задачи, металл не исследуют в лаборатории. Наша таблица имеет, следовательно, такой вид:

	1	2	3	4	5	6
$Д_1$	З	З	С0	С0	М0	М0
$Д_2$	С	М	З0	М0	З0	С0
$Д_3$	М	С	М	З0	С	З0

Так как столбцы 3, 4, 5, 6 находятся в логическом противоречии с условием 3), согласно которому в лаборатории не исследуют лишь один металл, то нужно принимать во внимание лишь столбцы 1 и 2. Отсюда следует, что серебро и медь могут оба занимать доли $Д_2$ и $Д_3$, конечно, если не учитывать условия 5). Между тем золото может занимать только долю $Д_1$, которая однозначно определена условиями 1), 2), 3). Из условия 4), следовательно, вытекает, что в лаборатории не исследуют золото. Но на основании условия 5) необходимо отбросить столбец 1, потому что хотя серебро здесь составляет среднюю долю, медь составляет наименьшую. Таким образом, остается столбец 2, откуда следует, что в Топонго добывается серебро и что наибольшую долю в сплаве составляет золото, среднюю — медь, а наименьшую — серебро.

4. Трое друзей

Составим таблицу:

	Скульптор Белов	Скрипач Чернов	Художник Рыжов
Альтернатива для цвета волос	ч	р	б
» » »	р	б	ч

Каждый из друзей может иметь волосы лишь того цвета, на который не указывает его фамилия. Однако черноволосым не может быть скульптор Белов, потому что Белов отвечает черноволосому. Следовательно, черноволосый — художник Рыжов. (Скульптор Белов имеет рыжие, а скрипач Чернов белые волосы). Читатель легко убедится, что при данных условиях нельзя составить другую таблицу.

5. В Пошехонье

Данные условия и некоторые их следствия запишем коротко так: 1) шорник = тестю слесаря; 2) Шорников = = мужу дочери маляра ≠ маляром; 3) Шорников ≠ лавочником; 4) Шорников ≠ пекарем; 5) лавочник и пекарь = = холостякам; 6) Шорников = мужу дочери Возчикова; 7) Возчиков = маляру (см. 2 и 6); 8) Лавочников = холостяку; 9) лавочник ≠ Пекаревым (отец лавочника = брату жены Пекарева); 10) Кузнецов = шорнику = тестю кузнеца (общий огород!); 11) колбасник = шурину возчика; 12) возчик = шурину колбасника; 13) тезка профессии тезки профессии Возчикова = колбаснику, т. е. тезка профессии Малярова = колбаснику (см. 7); отсюда следует, что Маляров ≠ колбасником, так как если бы Маляров был колбасником, то было бы, что Колбасников = колбаснику (вместе с Маляровым); 14) тезка профессии тезки профессии Кузнецова = возчику; т. е. тезка профессии Шорникова (см. 9), отсюда следует Шорников ≠ ≠ возчику, так как иначе Возчиков был бы возчиком, но Возчиков = маляру (см. 7).

На основании этих и дальнейших условий и их следствий составим таблицу из 9×9 полей для фамилий и профессий.

В каждой строке и в каждом столбце может быть только одно поле, заполненное знаком +, именно там, где пересекаются столбец фамилии и соответствую-

щая строка профессии. Все столбцы и строки должны содержать один такой знак, все другие знак—0.

Объясним, как эта таблица заполнялась.

Сразу можно внести два знака + (Кузнецов — шорник, Возчиков — маляр). Далее можно внести знаки 0 по условиям 3), 4), 14) для Шорникова.

Лавочников холост (см. 8), и, следовательно, он не может быть слесарем (см. 1), колбасником и возчиком (см. условия 11 и 12). Но он не может быть лавочником,

	Пе.	Мяс.	Кол.	Воз.	Ла.	Сле.	Ма.	Шор.	Куз.
Пекарь . . .	0	0	0	0	+	0	0	0	0
Мясник. . .	0	0	0	0	0	0	+ Iб	+ IIа	0
Колбасник	0	+ Iб	0	0	0	+ IIа	0	0	0
Возчик . . .	0	+ IIа	0	0	0	+ Iб	0	0	0
Лавочник. .	0	0	+	0	0	0	0	0	0
Слесарь. . .	0	0	0	0	0	0	+ IIа	+ Iб	0
Маляр . . .	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Шорник. . .	0	0	0	0	0	0	0	0	+
Кузнец . . .	+	0	0	0	0	0	0	0	0

потому что тогда он сменил бы Лавочникова (т. е. самого себя) в качестве начальника пожарников. Дальнейшие две возможности — маляр и шорник — уже исключены. Следовательно, Лавочников = пекарю.

Маляров не может быть возчиком, ибо тогда бы Возчиков был колбасником, но он маляр (см. 13 и 7). Маляров не может быть колбасником (см. 13), но не может быть и кузнецом (тогда бы Кузнецов был колбасником, но он шорник — см. 9), он не может быть и лавочником, так как тогда бы Лавочников был колбасником, а, значит, не был бы холост (см. 8). Маляров не может быть (по крайней мере при предположении, о котором скажем дальше) также и пекарем: ведь, согласно 13), Пекарев был колбасником, но, согласно 12), возчик был бы шурином колбасника, значит, шурином Пекарева, и был бы отцом лавочника (см. 10). Если же мы **предполагаем**, что профессии переходили от отца к сыну по наследству, то здесь имелось бы противоречие. Сделаем это **предположение**! Тогда: Маляров может быть только либо мясником — случай I, либо слесарем —

случай II. Шорников может быть, согласно полученным до сих пор результатам своего столбца, либо мясником — случай *а*, либо слесарем — случай *б*.

Случай, что Шорников=кузнецу, исключается, так как, согласно 14), Кузнецов был бы возчиком, но он шорник. Если бы Шорников был колбасником, то, согласно 13), было бы: тезка профессии Малярова=Шорникову, но тогда Маляров=шорнику, а, согласно 9), Кузнецов=шорнику, что противоречит друг другу. Шорников не может, следовательно, быть и колбасником.

В строке для лавочника остается единственное свободное поле, значит Колбасников является лавочником. Остается найти профессии Пекарева и Лавочникова. Из условий 5 и 8 вытекает, что Лавочников должен быть пекарем, он холост. Иначе бы Пекарев был пекарем (который холост), что расходится с условием 10), которое показывает, что Пекарев женат. Итак, Пекарев был кузнецом.

Задача имеет два возможных решения, касающихся, однако, только Мясникова, Слесарева, Малярова и Шорникова.

6. Убийство в лондонском метро

Из данных о смерти Зукко вытекает, что она последовала между 0.17 и 0.32. Замбалионе не мог убить Зукко, так как находился в ресторане близ Пикадилли (он вернулся туда, и его видели три свидетеля) с 0.20, т. е. раньше, чем поезд прибыл в Пикадилли. Если бы Замбалионе убил Зукко до 0.20, он должен бы иметь помощника, который бы уложил труп Зукко в поезд на станции Пикадилли. Но им не мог быть никто из подозреваемых, как следует из данных о времени.

Спагетти не мог убить Зукко, потому что он не ехал тем же поездом, каким ехал Зукко. Спагетти находился еще в 0.20 на Норсумберленд Эвеню, а поезд из Трафальгар Сквер уходит в 0.20. Далее, автобус № 13 не пересекается с линией метро так, чтобы Спагетти мог сесть в поезд до остановки Риджент Парк: автобус выехал позже поезда, и, кроме того, скорость движения автобуса меньше скорости метро (по плану видно, что линия автобуса не могла быть существенно короче линии метро). Из текста видно, что автобус ехал прямо на Бейкер Стрит.

Высказывание Шарпа, относящееся к «следующему поезду», ложно, так как после поезда, которым ехал Зукко, другого поезда уже не было (см. условие: «расписание последнего ночного поезда...»). Следовательно, Макарони был в том же поезде, что и Зукко. Хотя детектив Шарп и следил за ним, но, по-видимому, следил не за каждым его шагом. Он мог принять решение убить Зукко как раз потому, что заметил, что за ним следит Шарп, например, потому, что опасался, чтобы в дальнейшем против него Зукко не выступил как свидетель. Время для свершения убийства у него было с 0.22 до 0.29, когда его арестовали. Учитывая расстояние от Олдгейта до Пикадилли и Оксфорда Серкеса, видим, что Бутто явно не мог убить Зукко. По той же причине не мог он сесть и в поезд на Трафальгар Сквер. Полицейский явно ошибся, приняв за него кого-то другого.

Б. ЗАДАЧИ, РЕШЕННЫЕ СРЕДСТВАМИ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

ВВЕДЕНИЕ В ЛОГИКУ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Многие элементарные логические задачи можно решить при помощи логики высказываний, которая является основной составной частью символической логики.

Логика высказываний имеет дело с действиями над нерасчлененными высказываниями, т. е., в отличие от более сложных частей логики, здесь не интересуются структурой высказывания, тем, каковы его подлежащее и сказуемое, как и чем они соединены, и т. п. Под высказыванием понимают предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Например, высказываниями являются предложения «Москва находится в СССР», «Серебро не является проводником электричества», так как о первом можно сказать, что оно истинно, а о втором, что оно ложно. Однако выражения: «иди сюда!»; «который час?» и словосочетание: «кролик, если между тем» — не являются высказываниями; первое — повелительное, второе — вопросительное, третье — бессмысленный набор слов.

Из каких-нибудь данных высказываний можно образовать другие высказывания при помощи логических операций. Это мы делаем в повседневной жизни, когда объединяем предложения при помощи связок или же отрицаем что-либо, что нам сообщили, и т. п. Например, можно отрицать высказывание «Поезд не уходит в 12 часов» и образовать из этого высказывания, помещенного

в кавычки, новое высказывание: «Неправда, что поезд не уходит в 12 часов». Из двух высказываний — «Этот поезд опаздывает» и «Я не могу его дождаться» — можно образовать новое высказывание: «Этот поезд опаздывает, и я не могу его дождаться». Но из тех же двух «простых» высказываний можно образовать и другое «сложное» высказывание, применив союз «если..., то...»: «Если этот поезд опаздывает, то я не могу его дождаться». Из высказываний — «Теперь перед нами зажегся зеленый сигнал» и «Теперь перед нами зажегся красный сигнал» — можно образовать высказывание: «Теперь перед нами зажегся зеленый сигнал», которое исключает (утверждение) «теперь перед нами зажегся красный сигнал».

Мы привели здесь примеры сложных высказываний, возникающих из других (простых) высказываний посредством использования определенных выражений или оборотов, а именно:

«неправда, что...» (отрицание; символически: знак «—» — черточка над буквой); «если..., то...» (материальная импликация; знак: $\rightarrow$); «... и ...» (конъюнкция, или логическое умножение; знак: &); «... или ...» (дизъюнкция, или логическое сложение, знак: $\vee$); «...тождественное с ...» (эквивалентность; знак: $\equiv$); «... исключает ...» (неэквивалентность; знак: $\not\equiv$).

Эти выражения называются **функторами**. Чтобы лучше понять их свойства, покажем, как их можно определить при помощи особых таблиц.

Легко убедиться в том, что истинность или ложность сложных высказываний, образуемых при помощи приведенных здесь функторов, зависит только от истинности или ложности первоначальных (данных) высказываний. Как раз это свойство можно использовать, чтобы точно определить эти функторы. Для этого нужно лишь договориться еще о том, как записывать сами высказывания. Конкретные высказывания вроде «Этот стол — деревянный» (имеется в виду определенный стол, на который указываем) будем обозначать прописными или строчными буквами начала алфавита. Однако при изучении взаимных связей между высказываниями нас интересуют не конкретные высказывания, а любые, поэтому мы будем пользоваться последними буквами алфавита для

обозначения произвольного высказывания подобно тому, как в математике эти буквы обозначают переменные величины.

Наиболее распространенные функторы

X	$\overline{X}$
1	0
0	1

Эта таблица определяет функтор отрицания, обладающий тем свойством, что если высказывание X имеет значение истинности «правда» (что мы обозначаем знаком 1), то отрицательное высказывание $\overline{X}$ (которое мы обозначили чертой над исходным высказыванием X) имеет значение истинности «ложь» (что мы обозначаем знаком 0). И, наоборот, если X — ложно (вторая строка), то $\overline{X}$ — истинно. Как видно, можно отвлечься от содержания высказывания (как раз для этого мы и ввели переменные) и определить функтор отрицания лишь по отношению к возможным значениям истинности. Это свойство сохраняется и для остальных приведенных здесь функторов.

Функтор отрицания называют одноаргументным, потому что новое высказывание, возникающее при помощи отрицания, не зависит от других высказываний, кроме данного.

Двухаргументные функторы

X	Y	$X \& Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \equiv Y$	$X \not\equiv Y$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	1	0

В первых двух столбцах таблицы под переменными высказываниями X, Y записаны значения истинности так, чтобы в четырех строках были исчерпаны все возможности замещения X и Y значениями 1 и 0.

Функторы &, $\vee$, $\to$, $\equiv$, $\not\equiv$ имеют значения истинности, указываемые всегда под соответствующим функтором, причем так, что значение в первой строке соответствует сочетанию значений 1,1, во второй — сочета-

нию 1,0, в третьей — сочетанию 0,1 и в последней — сочетанию 0,0.

Если вместо переменных X, Y представим любые конкретные высказывания, то заметим, какое значение истинности будет иметь высказывание, образованное при помощи того или другого функтора.

Функтор & характеризует конъюнкцию, соединение высказываний связкой «и»; функтор $\vee$ выражает дизъюнкцию, соединение связкой «или», причем не исключается, что оба высказывания имеют место; функтор $\rightarrow$ называют функтором материальной импликации, который довольно точно соответствует соединению двух высказываний при помощи оборота «если..., то...»; функтор $\equiv$ является функтором эквивалентности («тогда, и только тогда, когда»), а функтор $\not\equiv$ является функтором неэквивалентности (либо..., либо).

Если из каких-либо высказываний, образованных при помощи функторов, дальнейшим применением функторов получим еще более сложные высказывания, то возникает целесообразность применения скобок, подобных скобкам в математике. Так, например, можно построить высказывания:

1) $X \vee \overline{X}$; 2) $(X \& Y) \rightarrow X$; 3) $(X \rightarrow X) \equiv \overline{X \& \overline{Y}}$; 4) $\overline{X \vee Y} \equiv$ $\equiv (\overline{X} \& \overline{Y})$; 5) $X \rightarrow (X \& Y)$ и др.

Подобные выражения называются формулами, если они правильно построены. Всякая формула должна удовлетворять следующим требованиям.

1. Всякое переменное X, Y, Z, ..., является формулой.

2. Если X и Y — формулы, то и $\overline{X}$, $X \& Y$; $X \vee Y$; $X \rightarrow Y$; $X \equiv Y$; $X \not\equiv Y$ также являются формулами.

3. Никакие другие выражения, кроме построенных по правилам 1 и 2, не являются формулами.

Читатель легко убедится, что все выражения (1) — (5) представляют собой формулы.

Среди формул занимают особое положение тавтологии, т. е. те, которые в столбце своих значений истинности имеют везде 1. Они являются одним из предметов изучения в исчислении высказываний. Например, с их помощью можно превратить данное выражение в выражение, эквивалентное ему, а это имеет значение, например, в теории логических сетей.

Покажем, как установить это свойство формулы. Для этого используем таблицы, в которых постепенно построим формулу, и этим получим столбец ее значений истинности.

В качестве примера возьмем формулу (2).

X	Y	$X\&Y$	$(X\&Y)\to X$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Сначала построим первую часть нашей формулы (2), а именно: $X\&Y$. Этой части принадлежит, согласно ранее приведенной таблице значений истинности для функтора &, столбец, записанный под $X\&Y$. Теперь используем таблицу для функтора $\to$, т. е. сочетаем всюду значение истинности $X\&Y$ со значениями истинности X в одинаковой строке, следовательно, в первой строке 1 с 1, во второй 0 с 1, в третьей 0 с 0, в четвертой 0 с 0. Однако во всех этих случаях столбец для $(X\&Y)\to X$ имеет значение истинности 1.

Аналогично получаем для (3):

X	Y	$X\to Y$	$X\&\overline{Y}$	$\overline{X\&\overline{Y}}$	$X\to Y\equiv\overline{X\&\overline{Y}}$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1

Согласно формуле (3) разрешается, следовательно, всякое выражение вида $X\to Y$ преобразовать в выражение вида $\overline{X\&Y}$. Это преобразование хорошо соответствует привычному нам переходу от одной формы мышления к другой. Как мы уже сказали, $X\to Y$ можно читать примерно так: «если X, то Y», а высказывание, которое, согласно (3), эквивалентно ему, читается как «Неверно, что имеет место X и не -Y», что можно менее точно прочитать и так: «Неверно, что (возможно) X без Y».

Тем же путем получаем для (4)

X	Y	$X \vee Y$	$\overline{X \vee Y}$	$\overline{X} \& \overline{Y}$	$\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \& \overline{Y}$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1

Формула (4) указывает на весьма полезное преобразование высказывания $\overline{X \vee Y}$ в высказывание $\overline{X} \& \overline{Y}$, т. е. выражает функтор $\vee$ через функтор &.

Формула (5) не представляет собой формулу, значения истинности которой всегда 1, т. е. она не всегда является истинной формулой (тавтологией). Это видно из последнего столбца таблицы:

X	Y	$X \& Y$	$X \rightarrow (X \& Y)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	0	1

В самом деле, в столбце формулы (5) не все значения истинности равны 1.

Этот весьма сжатый очерк логики высказываний завершим рассмотрением двух правил логического вывода.

1. Правило подстановки. В формуле можно заменить переменную, обозначенную какой-нибудь буквой, другой переменной или же формулой при условии, что мы это сделаем всюду, где заменяемая переменная встречается. Переменную можно также заменить знаком конкретного (постоянного) высказывания. Так, например, из формулы $(X \& Y) \rightarrow X$ можно подстановкой $(Z \& W)$ вместо Y получить новую формулу $(X \& (Z \& W)) \rightarrow X$. Если первоначальная формула (до подстановки) была тавтологией (т. е., если все ее значения истинности были 1), то это свойство сохранится и после подстановки.

2. Правило отделения. Если формула вида $X \to Y$ имеет значение истинности, равное 1, и если также формула X имеет значение истинности, равное 1, то и Y имеет значение истинности, равное 1. Иначе говоря, об истинности Y можно судить из того, что $X \to Y$ истинно и X также истинно.

В заключение приведем еще некоторые наиболее употребляемые тавтологические формулы, т. е. эквивалентности (законы) логики высказываний

(I) $X \vee X \equiv X,$

(II) $X \vee Y \equiv Y \vee X,$

(III) $X \vee (Y \vee Z) \equiv (X \vee Y) \vee Z,$

(IV) $X \& X \equiv X,$

(V) $X \& Y \equiv Y \& X,$

(VI) $X \& (Y \& Z) \equiv (X \& Y) \& Z,$

(VII) $\bar{\bar{X}} \equiv X$ ($\bar{\bar{X}}$ означает двойное отрицание X),

(VIII) $X \& (Y \vee Z) \equiv (X \& Y) \vee (X \& Z),$

(IX) $X \vee (Y \& Z) \equiv (X \vee Y) \& (X \vee Z),$

(X) $\overline{X \& Y} \equiv \bar{X} \vee \bar{Y},$

(XI) $\overline{X \vee Y} \equiv \bar{X} \& \bar{Y},$

(XII) $X \& (Y \vee \bar{Y}) \equiv X,$

(XIII) $X \vee (Y \& \bar{Y}) \equiv X,$

(XIV) $X \to Y \equiv \bar{X} \vee Y,$

(XV) $X \to Y \equiv \overline{X \& \bar{Y}},$

(XVI) $X \to Y \equiv \bar{Y} \to \bar{X},$

(XVII) $X \to (Y \to Z) \equiv (X \& Y) \to Z,$

(XVIII) $(X \equiv Y) \equiv (X \to Y) \& (Y \to X),$

(XIX) $(X \equiv Y) \equiv (X \& Y) \vee (\bar{X} \& \bar{Y}),$

(XX) $(X \vee \bar{X}) \equiv 1,$

(XXI) $(\overline{X \& \bar{X}}) \equiv 1,$

(XXII) $[(X \to Y) \& (Y \to Z)] \to (X \to Z).$

Примечание к употреблению эквивалентных формул. Те формулы, которые являются эквивалентностями, употребляются в логике, подобно тому, как тождества в математике. Если, например, в математике мы имеем: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, то мы можем везде, где встречается выражение $(a+b)^2$, поставить вместо него выражение, находящееся в правой стороне приведенного тождества, и наоборот. Логические эквивалентности применяются таким же образом. Если мы имеем выражение, вид которого отвечает одной стороне какой-либо эквивалентности, то мы можем заменить его выражением, отвечающим другой ее стороне. Это можно сделать потому, что обе стороны эквивалентности имеют одинаковые столбцы значений истинности.

Задачи 7—20 будем решать при помощи аппарата логики высказываний.

7. Автоматический сортировщик топлива

Обозначим через A высказывание «Грузовик с углем прибыл на склад»; через B — аналогичное высказывание относительно грузовика с коксом; через P — высказывание «Шахта открыта для угля»; через Q — аналогично для кокса. Тогда условия можно записать так:

(1) $A \to P,\ B \to Q;$

(2) $(A \mathbin{\&} \overline{B}) \vee (\overline{A} \mathbin{\&} B)$

(это условие выражает, что на складе находится не более одного грузовика);

(3) $(P \mathbin{\&} Q) \vee (\overline{P} \mathbin{\&} Q)$

(это условие выражает, что всегда открыто не более одной шахты).

Свойства механизма, управляющего сортировкой, о которых поставлен вопрос, можно записать так:

(4) $\overline{A} \to \overline{P},\ \overline{B} \to \overline{Q}.$

Эти свойства мы должны исследовать. Импликации (4) нельзя прямо вывести из (1), ибо из логики вы-

сказываний следует лишь, согласно (XVI), что $(A\to P)\equiv$ $\equiv(\overline{P}\to\overline{A})$, т. е. что имеет место $\overline{P}\to\overline{A}$, а вовсе не нужную нам импликацию $\overline{A}\to\overline{P}$.

Подставим в (XIX) вместо Y его отрицание $\overline{Y}$, а затем еще раз A вместо X и B вместо Y. Тогда получим

$$(A\equiv\overline{B})\equiv[(A\,\&\,\overline{B})\vee(\overline{A}\,\&\,\overline{\overline{B}})].$$

Но, согласно (VII), можно вместо $\overline{\overline{B}}$ подставить B, т. е. мы имеем

$$(A\equiv\overline{B})\equiv[(A\,\&\,\overline{B})\vee(\overline{A}\,\&\,B)].$$

Отсюда видно, что условие (2) можно выразить так:

(5) $A\equiv\overline{B}.$

Совершенно аналогично можно (3) представить эквивалентностью

(6) $P\equiv\overline{Q}.$

Подставляя из (5) и (6) в условие (1), получим, следовательно, $\overline{B}\to\overline{Q}$, т. е. вторую из импликаций в (4), про которую мы спрашивали; иначе говоря, мы получили утвердительный ответ на наш вопрос; если грузовик с коксом не въехал в помещение склада, шахта для кокса не откроется. Точно так же получим и первую импликацию формулы (4). Читатель легко убедится, например, при помощи таблицы истинности, что (5) эквивалентно формуле (7) $\overline{A}\equiv B$, а (6) — формуле (8) $\overline{P}\equiv Q$. **Если мы во** вторую импликацию условия (1) подставим соответствующие значения на основе (7) и (8), то сразу получим, $\overline{A}\to\overline{P}$, т. е. остальную часть ответа.

8. Туземцы и колониалисты

Обозначим первое допрашиваемое лицо через A. Введем далее обозначения:

XK ... X говорит, что он колониалист,

XK' ... «X — колониалист»,

XT ... X говорит, что он туземец,

XT' ... «X — туземец».

Если мы исключим случай, что допрашиваемое лицо молчит, то, очевидно, имеет место:

(1) $\overline{AK}\to AT.$

Из предположения о колониалистах далее вытекает

(2) $AK' \to \overline{AK}$.

Из (1) и (2), согласно формуле (XXII), получаем:

(3) $AK' \to AT$.

Аналогично легко выведем, что имеют место:

(4) $\overline{AK'} \to AT'$,

(5) $AT' \to AT$,

а следовательно, и

(6) $\overline{AK'} \to AT$.

Но из (3) и (6) вытекает, что имеет место AT, т. е. первое допрашиваемое лицо не могло сказать ничего другого, кроме «Я — туземец».

Дальнейший процесс решения прост, и мы наметим его лишь несколькими словами. Если бы второй допрашиваемый был колониалист, то он был заявил, что первый утверждал о себе, что ón колониалист. Но так как он сказал обратное, то ясно, что второй допрашиваемыей — туземец. Аналогично выведем, что третий допрашиваемый — колониалист.

9. Два племени

1. Предположим, что слуга — молодец.

а) Если второй туземец — молодец, то он скажет о себе, что óн — молодец, и слуга передаст это правдиво путешественнику.

б) Если второй туземец — лгун, то он скажет о себе, что óн — молодец, что слуга опять-таки правдиво передаст путешественнику.

2. Предположим теперь, что слуга — лгун.

а) Если второй туземец — молодец, то слуга передаст его высказывание перевранным, т. е. скажет, что он лгун.

б) Если второй туземец — лгун, то он скажет, что óн — молодец, и слуга также переврет его высказывание, сказав, что он — лгун.

Таким образом, слуга должен быть из племени молодцов, так как оба случая 2а и 2б противоречат условию задачи.

То же можно выразить короче. Аналогично, как в задаче 8, выведем, что на острове на данный вопрос никто не мог ответить ничего, кроме того, что он — молодец. Так как слуга воспроизвел правильно этот единственно возможный ответ, то ясно, что он — молодец.

Пусть читатель все это рассуждение проведет с помощью аппарата логики высказываний.

10. Порядок утверждения проекта

Обозначим через a высказывание «Цех A принимает участие в утверждении проекта», и аналогично буквами b и c — то же высказывание для цехов B и C.

Условия договора можно тогда записать так:

$$(1) \qquad \bar{b} \to \bar{a},$$

$$(2) \qquad b \to (a \,\&\, c),$$

Из (1) получим $a \to b$ следующим образом. Из тавтологии (XVI) логики высказываний $(X \to Y) \equiv (\bar{Y} \to \bar{X})$ подстановкой a вместо X и b вместо Y получим

$$(3) \qquad (a \to b) \equiv (\bar{b} \to \bar{a}).$$

Но в правой части (3) записано условие (1), а поэтому (1) эквивалентно $a \to b$. Далее, из тавтологии (XXII) логики высказываний подстановкой $(Y \,\&\, Z)$ вместо Z получим $\{(X \to Y) \,\&\, [Y \to (X \,\&\, Z)]\} \to [X \to (X \,\&\, Z)]$, а отсюда, подставляя вновь a вместо X и b вместо Y, получаем

$$(4) \qquad \{(a \to b) \,\&\, [b \to (a \,\&\, c)]\} \to [a \to (a \,\&\, c)].$$

Как формуле (1), так и формуле (2) можно приписать значение истинности 1, так как соблюдены условия договора. Следовательно, истинной является и левая сторона (4). Но и вся формула (1) должна иметь значение истинности 1, так как эта формула возникла из тавтоло-

гии. Поэтому можно применить к ней правило отделения и получить

(5) $a \to (a \& c)$,

что, согласно этому же правилу, также является истинным. Следовательно, цех *С* должен принимать участие в утверждении проекта, если в нем принимает участие цех *А*.

11. Разбитое окно. Первый вариант

Высказывания вида «... разбил окно», «... это сделал» и т. п. обозначим начальной буквой имени того, кто, согласно этим высказываниям, является виновником. Так, например, высказывание Розы запишем через *А*, а высказывание Ани через $\overline{А} \& Б$ и т. д. Особо нужно обозначить дополнения в высказывании Иры: «Не помню кто», как *R*, в высказывании Мани: «Окно разбилось само от ветра», как *W* и все высказывание Нади как *Q*. Тогда все высказывания можно переписать так:

Аня. $\overline{А} \& Б$.

Борис. $Б$.

Ваня. $\overline{Б} \& З$.

Даша. $\overline{\overline{Б} \& З} \& \overline{Д}$.

Ева. $[(К \& \overline{А}) \vee (\overline{К} \& А)] \& \overline{Е}$.

Закир. $(А \& \overline{Д} \& \overline{Е} \& \overline{Ж} \& \overline{С} \& \overline{И} \& \overline{К} \& \overline{М} \& \overline{Н} \& \overline{Р}) \vee (\overline{А} \&$ $Д \& \& \overline{Е} \& \ldots \& \overline{Р}) \vee \ldots \vee (\overline{А} \& \overline{Д} \& \overline{Е} \& \ldots \& \overline{Н} \& Р)$.

Женя. $(\overline{А} \vee Д \vee Е \vee Ж \vee С \vee И \vee К \vee М \vee Н \vee Р) \&$ $\& (А \vee \overline{Д} \vee Е \vee \ldots \vee Р) \& \ldots \& (А \vee Д \vee Е \vee \ldots \vee Н \vee Р) \&$ $\& Б \& В \& З \& Я \& Л$.

Соня. $С \& А$.

Ира. $(Б \& \overline{В} \& З \& Я \& Л) \vee (\overline{Б} \& В \& З \& Я \& Л) \vee (Б \& В \&$ $\& З \& \overline{Я} \& Л) \vee (Б \& В \& З \& Я \& \overline{Л}) \& R$.

Яша. $\overline{Б} \& Я$.

Катя. $\overline{К} \& А \& \overline{Б} \& \overline{В} \& \overline{Д} \& \overline{Е} \& \overline{З} \& \overline{Ж} \& \overline{С} \& \overline{И} \& \overline{Я} \& \overline{Л} \&$ $\& \overline{М} \& \overline{Н} \& \overline{Р}$.

Лева. $\overline{Б}\&Я$.

Маня. $\overline{\overline{Б}\&Я\&W}$.

Надя. Q.

Роза. A.

Примечание к записи. Мы выставляем предположение (S), неявно содержащееся в условиях задачи и необходимое для ее решения: окно разбило одно лицо. Пусть читатель исследует, как бы мы искали решение без предположения (S).

Высказывание Закира нужно было записать так, чтобы оно отражало, что окно разбила одна из девочек, и аналогично, высказывание Иры так, чтобы оно отражало, что окно разбил один из мальчиков.

В высказывании Жени мы выражаем ее утверждение: «Окно разбили мальчики» как $Б \& В \& З \& Я \& Л$. В дальнейшем увидим, что такой способ обоснован.

Ответ Закира, равно как и ответ Иры, принадлежит к наиболее широкому. Поэтому мы можем исходить из него и сначала предположить, что: (1) он неправдив, а затем, что (2) он правдив.

(1) Если ответ Закира неправдив, виновного следует искать среди мальчиков. Первая часть высказывания Жени является отрицанием высказывания Закира, следовательно, она должна быть истинна. Если бы мы вторую часть высказывания Жени записали как $Б \vee В \vee З \vee Я \vee \vee Л$, то все высказывание Жени было единственно истинным, все остальные 14 высказываний были бы ложными. Последовательно мы получили бы

Аня. $\overline{A}\&Б=0$, но так как, согласно (1), $A=0$, то должно быть $Б=0$.

Борис. $Б$, следовательно, ложно.

Ваня. $\overline{Б\&З}=0$, но так как $\overline{Б}=1$, то $З=0$.

Даша. $\overline{Б}\&З\&\overline{Д}$, но, согласно (1), $Д=0$, значит, $\overline{Д}=1$ и все высказывание Даши было бы правдивым. К высказыванию Жени прибавилось бы тогда, согласно (1), еще одно правдивое высказывание, что противоречит условию задачи. Поэтому мы и записали вторую часть высказывания Жени так, как приведено выше. Тогда, при предположении (5) определенно будет $Б \& В \& З \& Я \& \& Л=0$.

В высказывании Иры должно быть $R=0$, так как если бы было $R=1$, то высказывание Иры было бы единственно правильным, и тем же способом, какой мы только что применили, мы пришли бы к тому, что и высказывание Даши истинно, а это противоречило бы условию задачи, что только одно́ высказывание должно быть истинным.

Согласно (1), высказывание Розы должно быть ложным так же, как высказывание Кати и Евы. Далее, не может быть правдивым ни высказывание Яши, ни Левы (потому что они совпадают). Высказывание Нади ложно, как согласно (1), так и согласно (5).

Если бы в высказывании Ани было $Б=1$, то, согласно (1), было бы $\overline{A} \& Б=1$, а значит и высказывание Бориса было бы правдивым, что противоречит условию задачи. Следовательно, $Б=0$ и высказывание Ани также ложно.

Если бы высказывание Вани было ложно, то было бы $З=0$, тогда высказывание Даши $\overline{Б} \& \overline{З} \& \overline{Д}$ должно было быть правдивым, принимая во внимание (1), это было бы единственное правдивое высказывание.

Остаются высказывания: Жени — неправдивое, Иры — ложное при $R=0$, Мани — ложное при $W=0$. Если в высказывании Мани положить, что $W=1$, то оно будет истинным, принимая во внимание $\overline{Б} \& \overline{Я}=1$, что невозможно, так как уже примененным методом мы показали бы, что если бы высказывание Мани было единственно истинным, то, согласно (1), мы получили бы еще одно истинное высказывание (Даши или Вани). Аналогично, высказывание Нади неправдиво.

Однако предположение неправдивости высказывания Вани не дает нам возможности найти виновного при предположении (1). Если высказывание (1) истинно, то при предположении (1) виновником является Закир. Высказывание Вани является тогда единственно правдивым высказыванием, все другие ложны. (Высказывание Даши ложно, так как $\overline{Б} \& З=0$).

(2) Предположим теперь, что высказывание Закира истинно. Тогда оно единственное истинное высказывание. Ни один из мальчиков не является виновником. Рассмотрим последовательно такие высказывания:

Аня. $\overline{A} \& Б=0$. Так как $Б=0$, это высказывание ложно.

Борис. Принимая во внимание (2), это высказывание также ложно.

Ваня. Это высказывание также ложно из-за $З=0$.

Даша. $\overline{Б\&З}=1$, значит, должно иметь место $\overline{Д}=0$, т. е. $Д=1$: виновником была бы Даша. Здесь необходимо заметить, что высказывание Ани было бы ложным и тогда, если, кроме $Б=0$, мы допустили бы, что и $\overline{A}=0$. Но так как ответ Даши должен быть ложным, было бы двое виновных, что противоречит предположению (S). Следовательно, $\overline{A}=1$ или же $A=0$. Остальные высказывания имеют следующие значения истинности.

Ева. Явно 0, потому, что $(K\&\overline{A})\vee(\overline{K}\&A)=0$ (см. (S) и $Д=0$).

Закира. Правдивое, согласно (2).

Женя. Неправдивое, так как член $(\vee\overline{Д}\vee E\vee\ldots H\vee P)$ неправдивый из-за (S) и $Д=0$.

Соня. Из-за $C=A$ неправдиво (см. (S)).

Ира. Неправдиво из-за (2), так как первая часть высказывания (без R) ложная.

Яша. Так же, как и Левы, ложны.

Катя. Из-за $A=0$ ложно.

Маня. При $W=0$ ложно.

Надя. При $Q=0$ ложно.

Роза. Из-за $A=0$ ложно.

Предположение (2) приводит, следовательно, к другому результату, чем предположение (1). Значит, задача имеет не единственное решение. Если к тексту задачи добавить, например, условие, что Закир не был виновником, то решение было бы единственным.

12. Разбитое окно. Второй вариант

Обозначим каждую тройку высказываний начальными буквами имени высказывающего и индексами *1*, *2*, *3* каждое его высказывание по порядку, приведенному в задаче: A_1, A_2, A_3, $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$, $В_1$, $В_2$, $В_3$, $М_1$, $М_2$, $М_3$. Будем исходить из высказываний Вани. $В_1$ и $В_3$ могут быть лишь либо оба истинными, либо оба ложными. Но, согласно заключительному условию задачи, они не могут быть оба ложными. Тогда оба истинны, и $В_2$ ложно. Следовательно, $М_1$ истинно. Так как $В_3$ истинно, то $Б_3$ ложно, а значит, $Б_1$ и $Б_2$ истинны. Тогда, конечно, $М_3$ ложно, а значит $М_2$ истинно. Тогда A_1 ложно. Окно разбила Аня.

Упрощение. Используя знак 1 для истинности, а знак 0 для ложности предложения, имеем: либо $B_1 = B_3 = 1$, либо $B_1 = B_3 = 0$. Но второй случай невозможен. Поэтому $B_1 = B_3 = 1$, а следовательно, $B_2 = 0$. Тогда $M_1 = 1$. Так как $B_3 = 1$ имеем $Б_3 = 0$, а значит $Б_1 = Б_2 = 1$. Тогда, разумеется, $M_3 = 0$, а значит $M_2 = 1$. Но тогда $A_1 = 0$, что является результатом.

13. Разбитое окно. Третий вариант

Обозначим высказывания вида «это сделал *X*» буквой *X*, соответствующей начальной букве имени. Тогда высказывания задачи можно записать коротко так. Яша: Вл., Боря: $\overline{\text{Вл.}}$, Маня: М, Ваня: $(M \vee A)\ \&\ \overline{M \& A}$, Вл.: $\overline{\overline{\text{Вл.}}}$, Стеша: *M*, Леня: $\overline{M}$, Аня: $\overline{M} \& A$, Ольга: $\overline{M} \& \overline{A} \& \overline{Вл}$.

Утверждение вида «Высказывание *X* истинно» или же «Высказывание *X* ложно» будем, как и прежде, записывать как $X = 1$, или же $X = 0$.

Существенным предположением, явно не высказанным в задаче, которым мы ее дополним, является то, что виновник лишь один. Хотя в задаче и сказано «кто разбил окно» (а не «разбили окно»), виновников могло быть и больше, как нам покажет разбор.

1) Будем исходить из высказывания Вани $(M \vee A)\&\overline{M\&A}$. Положим, что $(\quad \vee A)\&\overline{M\&A} = 0$. Тогда, согласно формула, (X) и (XI), будет $(\overline{M}\&\overline{A}) \vee (M\&A) = 1$, но, согласно (IX) имеем: $(\overline{M}\&\overline{A}) \vee (M\&A) \equiv [(\overline{M}\&\overline{A}) \vee M]\&[(\overline{M}\&A \vee A] \equiv [M \vee \vee (\overline{M}\&\overline{A})]\&[A \vee (\overline{M}\&\overline{A})] \equiv (M \vee A)\&(M \vee \overline{A}) = 1$, а следовательно, $M = A = 1$. Но в предположении, что имеется лишь один виновник, было бы обязательно: $M = 0$ и $A = 0$, а поэтому в этом случае Вл. $= 1$. Но тогда и $\overline{\overline{\text{Вл.}}} = 1$, $\overline{M} = 1$, $\overline{M}\&\overline{A} = 1$, т. е., вопреки условию задачи, истинными были бы четыре высказывания.

Если отбросить условие, что виновник лишь один, то могло бы быть: $M = 1$, $A = 1$. Если еще было бы Вл $= 0$, то были бы истинными высказывания Бориса, *M* (Манино), *M* (Стешино), а ложными высказывания Яши, Вл (Владика), $(M \vee A)\&\overline{M\&A}$ (Ванино); $\overline{M}$ (Лени) $\overline{M}\&\overline{A}$ (Анино) и $\overline{M}\&\overline{A}\&\overline{\text{В}}$л. (Розы). Виновными бы тогда были Маня и Аня вместе.

2) Предположим теперь, что $(M \vee \overline{A})\&\overline{M}\&A = 1$. Тогда: $M \vee A)\&(\overline{M} \vee \overline{A}) = 1$, т. е. либо $M = 1$ и $A = 0$, либо $M = 0$ и $A = 1$.

а) Если $M = 1$, то $A = 0$, Вл. $= 0$ (при одном виновном). Тогда: $M = 1$ (высказывание Мани), $M \equiv \overline{A} = 1$ (высказывание Вани), $M = 1$ (высказывание Стеши), $\overline{\text{Вл.}} = 1$ (высказывание Бориса), а следовательно, истинными были бы четыре высказывания — вопреки условию.

б) Если $M = 0$, $A = 1$, тогда Вл $= 0$, $\overline{\text{Вл.}} = 1$. Тогда: $M \equiv \overline{A} = 1$, $\overline{M} = 1$, $\overline{\text{Вл}} = 1$, иначе говоря, истинными являются высказывания Вани, Лени и Бориса. Все другие высказывания ложны. Виновницей является Аня.

14. Рассеянный профессор

Из условий задачи следует, что искомые вещи могут находиться либо в комнате справочников *С*, либо в комнате трудов *Т*, либо в комнате журналов *Ж*. Высказывание слуги будем понимать как утверждение, что вещи находятся в *С*. Остается еще письменный стол профессора *П*.

Утверждение, что «предмет x находится в (на) Y», обозначим «$x \varepsilon Y$». Далее, словарь эскимосского языка — через *э*, учебник носологии — через *н*, памфлет Болтунова — через *б*.

Тогда можно записать:

1. Утверждения профессора $e\varepsilon T$, $н\varepsilon Ж$, $б\varepsilon Ж$.
2. Утверждения лаборанта: $e\varepsilon T$, $н\varepsilon C$, $б\varepsilon C$.
3. Утверждения жены профессора: $e\varepsilon Ж$, $н\varepsilon T$, $б\varepsilon T$.

4. Далее, неверно: $\overline{e\varepsilon T}\&\overline{e\varepsilon C}\&\overline{e\varepsilon Ж} \equiv e\varepsilon П$ и аналогично для *н* и *б*.

Если все утверждения 1, 2, 3 ложны, как это утверждает дочка профессора, тогда истинно утверждение:

$$\overline{e\varepsilon T}\&\overline{нeЖ}\&\overline{б\varepsilon Ж},$$

$$\&\overline{e\varepsilon C}\&\overline{н\varepsilon C}\&\overline{б\varepsilon C},$$

$$\&\overline{e\varepsilon Ж}\&\overline{н\varepsilon T}\&\overline{б\varepsilon T}.$$

Но, исходя из формулы (V), можно объединить знаком «&» все три высказывания первого столбца, а равно второго и третьего. Однако, согласно 4, это означает: *евП&невП&бвП*, т. е. все искомые вещи находятся на столе профессора.

15. Договорные начала

Обозначим через *а* высказывание: «в утверждении участвует учреждение *А*», через *б* — высказывание: «в утверждении участвует учреждение *Б*» и через *в* — высказывание: «В утверждении участвует учреждение *В*».

Договоренность о порядке утверждения проекта можно тогда записать следующим образом: (1) $(а\&б)\rightarrow в$ и (2) $(б\&в)\rightarrow а$.

Если бы из договоренности следовало, что после утверждения в учреждениях *А* и *В* в утверждении должно принять участие еще учреждение *Б*, то, очевидно, должно бы быть:

$$\{[(а\&б)\rightarrow в]\&[(б\&в)\rightarrow а]\}\rightarrow[(а\&в)\rightarrow б].$$

Если бы (3) имело место всегда, то, на основании правила отделения, мы должны бы считать истинным высказыванием также и $(а\&в)\rightarrow б$, так как (1) и (2), согласно предположению, имеют место всегда. Если бы (3) не имело место всегда, то были бы возможны такие утверждения проекта, при которых его утверждение в учреждениях *А* и *В* не требовало бы его утверждения в учреждении *Б*.

1. Найдем такие значения истинности высказываний *а*, *б*, *в*, для которых (3) будет иметь значение истинности 0. Этим будет доказано, что $(а\&в)\rightarrow б$ не вытекает с необходимостью из (1) и (2). Для этого достаточно, чтобы только что написанное выражение имело значение 0, а выражение [(1)&(2)] имело бы значение 1. Но выражение $(а\&в)\rightarrow б$ имеет значение 0 при $а\equiv в\equiv 1$; $б\equiv 0$. При этих значениях выражение $(а\&б)\rightarrow в$ имеет значение 1, выражение $(б\&в)\rightarrow а$ имеет также значение 1, а следовательно, и выражение, получаемое из обоих этих выражений при помощи их объединения знаком &, имеет также значение 1. Поэтому (3) не является всегда истинным высказыванием.

Более подробный разбор дан в таблице истинности.

а	б	в	(а&б) → в	(б&в) → а	(а&в) → б	(3)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Значения истинности последнего столбца соответствуют значениям истинности формулы (3). Как видно, кроме нам уже известного случая $а \equiv в \equiv 1$, $б \equiv 0$, значение истинности формулы (3) всегда равно 1. Это обстоятельство приводит к тому, что мы иногда склонны на основании (1) и (2) неправильно заключать и $(а\&в) \to б$.

2. Если мы используем логику классов (о ней будет речь в следующей части книги), то решение получим, пожалуй, еще быстрее. Обозначим класс процесса утверждения в учреждении *А* через *А*, в учреждении *Б* — через *Б*, а в учреждении *В* — через *В*. Тогда договоренность запишется в виде уравнений: (1′) *АБ*=*АБВ* и (2′) *БВ*=*АБВ*.

Для *АВ* всегда *АВ*=*АБВ*˙/.*АбВ*[1]. Правая сторона этого уравнения не изменится, если в нее подставим согласно (1′) и (2′). Поэтому если в процессе утверждения проекта примут участие учреждения *А* и *В*, то учреждение *Б* может, но не обязательно, принять в нем участие.

16. Турист. Первый вариант

Турист показал на одну из дорог и спросил: «Правда ли, что эта дорога ведет к озеру и что дважды два равно пяти?» Оба парня ответили «Нет», откуда он заключил, что эта дорога ведет к озеру.

---

[1] Знак ˙/. обозначает сложение логических классов (см. «Введение в логику классов»).

Турист рассуждал следующим образом: имеются две возможности.

Возможность 1. Дорога, на которую я указал, ведет к озеру. Говорящий всегда правду, *П* ответит на вопрос, ведет ли дорога к озеру, «да», а на вопрос, правда ли, что дважды два равно пяти,— «нет», а поэтому на мой вопрос в целом он ответит «нет». Лжец *Л* ответит на вопрос, ведет ли дорога к озеру, «нет», а на вопрос, правда ли, что дважды два равно пяти — «да», следовательно, на мой вопрос в целом ответит «нет».

Возможность 2. Дорога, на которую я указал, не ведет к озеру. В этом случае *П* ответит на вопрос, ведет ли дорога к озеру, «нет», на вопрос, правда ли, что дважды два пять, тоже — «нет», поэтому на вопрос в целом — «нет». *Л* ответит на вопрос, ведет ли дорога к озеру, «да», на вопрос, правда ли, что дважды два пять — также «да», следовательно, на мой вопрос в целом ответит «да».

Таким образом, в случае 1 оба ответа будут «нет», а в случае 2 один ответ будет «да», другой — «нет». Поэтому дорога, на которую я указал, ведет к озеру лишь в том случае, если я получу на мой вопрос оба ответа «нет».

Символическая логика дает возможность выразить эти рассуждения коротко и обозримо.

Обозначения: p — высказывание «эта дорога ведет к озеру»; q — высказывание «дважды два равно пяти».

Так как для любых высказываний X, Y верно, что высказывание $X \& Y$ истинно только при одновременной истинности X и Y, то это верно и для высказываний p и q. Поэтому мы можем составить таблицу истинности.

	p	q	$p \& q$
П	1	0	0
Л	0	1	0
П	0	0	0
Л	1	1	1

Первая и вторая строки соответствуют возможности 1, третья и четвертая — возможности 2.

Разумеется, турист мог поставить и другие вопросы. Например, «Правда ли, что эта дорога ведет к озеру и что Волга впадает в Тихий океан?» (С той же таблицей истинности). Или: «Правда ли, что эта дорога ведет к озеру и что медь — металл?» с таблицей истинности:

	p	q	$p\&q$
П	1	1	1
Л	0	0	0
П	0	1	0
Л	1	0	0

Но он мог также использовать другую связку, например, «или», а также «если..., то...», и тогда, понятно, таблицы истинности были бы другие. Например, вопросу: «Правда ли, что эта дорога ведет к озеру или что медь — металл?» соответствует такая таблица истинности:

	p	q	$p \vee q$
П	1	1	1
Л	0	0	1
П	0	1	1
Л	1	0	0

Как видно, в этих обоих случаях турист в состоянии решить, имеет ли место возможность 1 или 2. Однако он не должен ставить вопрос, подобный следующему: «Правда ли, что эта дорога ведет к озеру и что ты говоришь правду?», так как соответствующая таблица истинности:

	p	q	$p\&q$
П	1	1	1
Л	0	1	0
П	0	1	0
Л	1	1	1

не поможет ему решить, какая из возможностей 1 или 2 имеет место.

17. Турист. Второй вариант

Этот вариант мы предоставим решить самому читателю.

18. Турист. Третий вариант

Это более трудный вариант. Приведем решение. Турист должен спросить: «Сказал бы второй парень, что эта дорога ведет к озеру?» Составим таблицу возможных ответов.

	Ответ	Что сказал бы второй парень?	Кем был бы второй парень?	Ведет ли дорога к озеру?
П	Да	Да	*Л*	Нет
	Нет	Нет	*Л*	Да
Л	Да	Нет	*П*	Нет
	Нет	Да	*П*	Да

Как видно, в случае ответа «да» дорога не ведет к озеру, между тем как в случае ответа «нет» дорога ведет к озеру, причем не зависимо от того, какому из парней турист задал свой вопрос (значения истинности в последнем столбце зависят только от значений истинности в первом столбце).

19. Правитель острова

Для решения необходимо сделать предположение, что под «правдой» мы будем понимать то, что содержание высказывания пришельца совпадает с предшествовавшим ему решением правителя (которое пришелец может не знать). Например, правитель мог заранее решить, что пришельца расстреляют. Если пришелец угадает это решение и скажет: «Меня расстреляют», то войдет в силу первая часть распоряжения. Мы далее предположим, что правитель не изменит принятого решения под влиянием ответа пришельца, а также, что правитель всегда примет решение либо о расстреле, либо о повешении.

Обозначим содержание высказывания (совпадение решения правителя и высказывания пришельца) через *П*,

если это повешение, и через *P*, если это расстрел. Тогда можно составить таблицу:

Решение правителя	Высказывание пришельца	Значение истинности	Распоряжение устанавливает
П	*П*	1	*P*
П	*P*	0	*П*
P	*П*	0	*П*
P	*P*	1	*P*

Очевидно, если пришелец скажет: «Я осужден к повешению», этим он создаст для правителя безвыходное положение: либо правитель будет противоречить своему собственному распоряжению (первая строка), либо своему собственному решению (третья строка). Следовательно, своим ответом: «Я осужден к повешению» — пришелец может сохранить себе жизнь, разумеется, в предположении, что правитель не захочет отступить ни от своего решения, ни от своего распоряжения.

20. Утюг с автоматическим выключателем

Будем рассматривать контакт *К*, которым утюг включают, контакт *П*, предохраняющий утюг от перегрева, и состояние отопительной спирали *С*. Высказывание «*К* включен» обозначим через *к*; высказывание «*П* включен (т. е. не включает соединения)» — через *п*. Высказывание «*С* перегрета» — через *с*.

Составим таблицу всех возможных состояний *К*, *П*, *С* (1 обозначает включение или перегрев, О означает выключение или отсутствие перегрева).

к	*п*	*с*	Допустимость состояния	Строка
1	1	1	Нет	1
1	1	0	Да	2
1	0	1	Да	3
1	0	0	Нет	4
0	1	1	Нет	5
0	1	0	Да	6
0	0	1	Да	7
0	0	0	Нет	8

Обоснование: а) состояние в строке 1 недопустимо, так как оба контакта *К* и *П* были бы включены при перегреве *С*; б) состояние в строке 4 недопустимо, так как при включении *К* в сеть внутри утюга ток был бы контактом *П* выключен; в) состояние в строке 5 недопустимо, так как при выключенном *К* и перегреве *С* контакт *П* был бы выключен, что означало бы повреждение *П*; г) состояние в строке 8 недопустимо, так как при включении *К* в сеть *П* остался бы невключенным. Этот случай был бы возможен лишь, если бы с включением *К* автоматически включался внутри утюга и контакт *П*, но это привело бы к осложнению, которое здесь разбирать не станем; д) все другие состояния допустимы (необходимы для функционирования утюга).

Тогда истинны высказывания: $к \& п \& \bar{с}$, $к \& \bar{п} \& с$, $\bar{к} \& п \& с$, $\bar{к} \& \bar{п} \& с$ (последнее — это случай, когда после выключения контакта *П* мы еще выключили бы контакт *К*).

Тогда из всех возможностей истинны эти высказывания, все другие ложны. Значит, все состояние функционирования *К*, *П*, *С* описывается так:

$$ф\,(к,\ п,\ с) = (к \& п \& \bar{с}) \vee (к \& \bar{п} \& с) \vee (\bar{к} \& п \& \bar{с}) \vee (\bar{к} \& \bar{п} \& с),$$

где *ф* — знак функции, указывающей на то, что утюг должен находиться в одном из состояний, описываемых парами скобок.

Для любых высказываний *X* и *Y*

$$(X \& Y) \vee (\bar{X} \& Y) \equiv Y,$$

в чем читатель может убедиться при помощи таблицы значений истинности

X	Y	$(X \& Y)$	$(\bar{X} \& Y)$	$(X \& Y) \vee (\bar{X} \& Y)$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

Поэтому мы можем выражение (первая и третья скобки) $[\kappa\&(n\&\bar{c})]\vee[k\&(\bar{n}\&\bar{c})]$ упростить, получив: $n\&\bar{c}$; аналогично остающиеся две строки дадут: $\bar{n}\&c$.

Тогда, $\phi(\kappa, n, c)=(n\&\bar{c})\vee(\bar{n}\&c)$.

Или $\phi(\kappa, n, c)=(n\equiv\bar{c})$.

То обстоятельство, что *К* здесь не фигурирует, не должно удивлять, так как отношение между *П* и *С* является решающим.

В. ЗАДАЧИ, РЕШЕННЫЕ СРЕДСТВАМИ ЛОГИКИ КЛАССОВ

ВВЕДЕНИЕ В ЛОГИКУ КЛАССОВ (ПО У. С. ДЖЕВОНСУ)

Логику классов можно применить для решения задач в тех случаях, когда мы имеем дело с относительно постоянными, различимыми, не переходящими друг в друга качествами. Под «качеством» при этом следует понимать не только свойства в обычном смысле (например, «твердость», «бесцветность», «сердечность»), но в более широком смысле — целые ситуации, которые можно отличить от других ситуаций.

Символы, которыми мы будем здесь пользоваться, следующие:

A, *B*, *C* или другие заглавные буквы обозначают качества или совокупности качеств, которые определяют содержание названий предметов или классов предметов;

a, *b*, *c* или другие строчные буквы обозначают отсутствие соответствующих качеств (например, *a* обозначает отсутствие качества *A*); знак «=» обозначает тождественность выражений, между которыми он поставлен (например, $A=B$ обозначает, что качество, обозначенное через *A*, тождественно с качеством, обозначенным через В); знак ˙/. — выражение «или», например, *A* ˙/. *B* значит, что налицо либо качество *A*, либо качество *B*, либо оба качества вместе (логическая сумма); если мы напишем две буквы рядом, то образуем выражение, которое означает, что налицо имеются оба качества, обозначенные этими буквами (логическое произведение), например, *AB* означает объединение качеств *A* и *B*, меж-

ду тем как aB обозначает, что налицо отсутствие качества A и присутствие качества B.

Введенные операции подчиняются следующим правилам.

1. Правила перестановки: $A \,^{\cdot}/_{\cdot}\, B = B \,^{\cdot}/_{\cdot}\, A$, $AB = BA$; как логическая сумма, так и логическое произведение двух качеств не зависят от порядка слагаемых или сомножителей.

2. Правила поглощения (упрощения): $A \,^{\cdot}/_{\cdot}\, A = A$, $AA = A$; качества A или A — это просто качество A. Если мы имеем одинаковое качество A дважды, то это то же, как если бы назвали его один раз.

3. Правила дистрибутивности (распределения): $A \,^{\cdot}/_{\cdot}\, BC = (A \,^{\cdot}/_{\cdot}\, B)$; $(A \,^{\cdot}/_{\cdot}\, C)$; $A(B \,^{\cdot}/_{\cdot}\, C) = AB \,^{\cdot}/_{\cdot}\, AC$; качество A или качества B и C, это то же самое, как качество A или качество B и качество A или качество C. Качество A и качества B или C это то же самое, как качество A и качество B или качество A и качество C.

4. Правила тождества: $A = A$.

5. Правила исключенного третьего: $A = AB \,^{\cdot}/_{\cdot}\, Ab$.

6. Правила противоречия: $Aa = 0$; здесь 0 означает пустой класс, т. е. это правило выражает то, что нет одновременного объединения наличия и отсутствия какого-либо качества.

Многократное применение правила 5 порождает выражения, являющиеся всеми допустимыми сочетаниями качеств, так называемый «полный логический алфавит», несколько первых столбцов которого приведено ниже:

AB	ABC	$ABCD$	$aBCD$	$ABCDE$	. . .
Ab	ABc	$ABCd$	$aBCd$		
aB	AbC	$ABcD$	$aBcD$		
ab	Abc	$ABcd$	$aBcd$		
	aBC	$AbCD$	$abCD$		
	aBc	$AbCd$	$abCd$		
	abC	$AbcD$	$abcD$		
	abc	$Abcd$	$abcd$		

Единственным правилом вывода является правило подстановки.

Вместо какого-нибудь класса можно подставить тот, который имеет тот же смысл, что и исходный класс. При этом класс может обозначаться либо одной буквой, либо сочетанием букв, поставленных рядом, либо соединенных знаком ˙/. . Например, *AB* ˙/. *B* ˙/. *aC* является классом. Принимается как обязательный закон, что для всякого класса *X* существует дополнительный класс *x*, такой, что $Xx=0$. Это приводит к следующему правилу: два высказывания взаимно противоречивы тогда и только тогда, если после всех возможных подстановок они приводят к исчезновению какого-нибудь выражения из логического алфавита.

Сделаем теперь несколько замечаний, полезных при решении задач. Главные виды задач следующие.

1. Даны какие-то условия, связывающие между собой классы. Требуется определить, какие возможности (сочетания) исключены этими условиями.

2. Даны какие-то сочетания классов. Требуется определить, какие отношения существуют между классами.

3. Даны какие-то уравнения, связывающие классы между собой, в виде некоторых условий. Требуется вывести (при помощи допустимых подстановок) из этих уравнений другие уравнения.

Все эти три типа задач поясним на простейших примерах.

1. Пусть даны классы *A*, *B*, *C* и условия $A=AB$, $C=Cb$. Требуется определить, какие сочетания этих классов данные условия допускают, а какие они исключают. Пусть, например, *A* означает класс «млекопитающих», *B* — класс «позвоночных», *C* — класс «червей».

По правилу построения «полного логического алфавита» из трех классов можно образовать восемь сочетаний, объединенных знаком ˙/. :

ABC ˙/. *ABc* ˙/. *AbC* ˙/. *Abc* ˙/. *aBC* ˙/. *aBc* ˙/. *abC* ˙/. *abc*.

Если мы подставим, согласно условию $A=AB$, в первый член этого выражения, то получим *ABBC*, что, на основании правила поглощения, равно *ABC*. Значит, пер-

вый член этой подстановкой не меняется. Также не меняется и второй член. Однако третий и четвертый члены после указанной подстановки приобретают вид $ABbC$ и соответственно $ABbc$, или же, согласно правилу противоречия, $A0C$ и соответственно $A0c$. Оба эти сочетания, согласно правилу перестановки, можно записать как $AC0$ и $Ac0$. Но, как мы сейчас же докажем, всякое выражение вида $X0$ равно 0, т. е. является пустым классом. Для доказательства этого утверждения будем исходить из уравнения $0=0$, которое, очевидно, истинно. Если мы в левой части этого уравнения подставим, согласно правилу противоречия, вместо 0 выражение Xx, то получим $Xx=0$. Но, согласно правилу поглощения, можно вместо X подставить XX и получим $XXx=0$, а так как $Xx=0$, то отсюда получаем $X0=0$, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что если в каком-нибудь логическом произведении встречаются одновременно знаки X и x, то это произведение можно заменить нулем.

Продолжаем наш пример (1). Будем теперь подставлять из условия $C=Cb$. Тогда первый член будет пустым классом, так как после подстановки получим $ABCb=0$. Аналогично и пятый член $aBCb=0$.

Таким образом, в пустые классы в результате обеих подстановок превратились первый, третий, четвертый и пятый члены. Однако пустые классы можно в сумме классов откинуть, т. е. $X \,{}^{\cdot}\!/_{\!\cdot}\, 0=X$. Для доказательства последнего утверждения будем исходить из правила исключения $X=XY \,{}^{\cdot}\!/_{\!\cdot}\, Xy$. Подставим в него вместо Y выражение X и получим $X=XX \,{}^{\cdot}\!/_{\!\cdot}\, Xx$. Но вместо выражения Xx можно подставить, согласно правилу противоречия, 0. Тогда получим $X=XX \,{}^{\cdot}\!/_{\!\cdot}\, 0$; используя правило упрощения $XX=X$, мы получаем $X \,{}^{\cdot}\!/_{\!\cdot}\, 0=X$, что и требовалось доказать.

Это значит, что, возвращаясь к нашему примеру, условия $A=AB$ и $C=Cb$ совместимы лишь с сочетаниями ABc, ABc, abC, abc. Если вернемся к нашему истолкованию, то получим, что возможны лишь млекопитающие — позвоночные, не являющиеся червями, позвоночные, не являющиеся млекопитающими и червями, черви, не являющиеся млекопитащими и позвоночными; организмы, не являющиеся ни млекопитающими, ни позвоночными, ни червями.

2. Пусть теперь, наоборот, даны сочетания ABc, Abc, abC и abc как единственно возможные, и мы должны определить отношения, которые имеются между A, B, C в виде логических уравнений, делающие невозможными остальные сочетания, т. е. ABC, AbC, aBC, aBc. Чтобы найти эти уравнения, поступаем так: выражение A встречается в сочетаниях ABC, Abc. Согласно правилу исключенного третьего, для выражения A имеет место $A = AB \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} Ab$. Но, согласно тому же правилу, для AB имеет место $AB = ABC \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} ABc$, а для Ab имеет $Ab = AbC \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} Abc$. Подставляя из второго и третьего уравнения в первое, получаем, наконец, разложение A по B, C, а именно:

$$A = ABC \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} ABc \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} AbC \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} Abc.$$

По этому образцу можно разложить любое выражение по любым двум буквам и их отрицаниям. В нашем случае, однако, сочетания ABC и AbC не встречаются, по-видимому, потому, что каким-то условием они были исключены. Следовательно, разложение A будет лишь $A = ABc \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} ABc$, что, согласно правилу исключенного третьего, можно записать как $A = Ac$. Аналогично получим, что для a имеет место $a = abC \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} abc$, т. е. $a = ab$. О том, что условия $A = Ac$, $a = ab$ в самом деле совместимы лишь с сочетаниями ABc, Abc, abC, abc, можно убедиться путем проверки, поступая, как указано в 1.

Простое правило для решения задач типа 2, следовательно, гласит: из данных сочетаний выберем те, которые содержат какое-то нами избранное положительное выражение. Эти сочетания объединим знаками $\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}}$, получая тем самым разложение данного выражения, согласно правилу исключенного третьего, и упростим его, пользуясь правилами логики классов. Аналогично поступим и с отрицанием избранного выражения. Так получим условия, связывающие данные классы. Разумеется, если бы мы избрали другой класс, условия имели бы другой вид.

Последнее замечание поясним на примере. Если мы вместо класса A изберем в последнем разобранном нами случае класс C, тогда разложение C будет дано уравнением $C = abC$, что является новым условием; далее, имеет место $c = ABc \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} Abc \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} abc$. Правую часть этого уравнения можно упростить, использовав дважды прави-

ло исключенного третьего: во-первых, $ABc\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ Abc=Ac$, во-вторых, $Abc\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ abc=bc$, откуда $c=ABc\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ Abc\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ abc=Ac\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ bc=c(A\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ b)$, как второе условие.

Однако логические условия, исключающие некоторые из всех возможных сочетаний данных выражений, можно получить еще и другим путем. Для этого возьмем исключенные сочетания, в нашем примере это были ABC, AbC, aBC, aBc, которые, следовательно, являются пустыми классами, и объединим их знаками ${}^{\cdot}/_{\cdot}$. Так как правило исключенного третьего имеет место всегда, независимо от того, каковы классы, к которым оно применяется, то, объединяя первые два сочетания, мы получим AC; объединяя вторые два, получим aB, и таким образом имеем: $AC\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ aB$, где как AC, так и aB — пустые классы, так как они возникли в результате объединения пустых классов. Значит, мы имеем $AC=0$, $aB=0$. Если теперь класс A развернем в C, то получим $A=AC\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ Ac$, но так как $AC=0$, то это дает $A=0\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ AC=Ac$, т. е. наше первое условие, полученное нами прежде другим путем. Если класс a разложим по B, то получим аналогично $a=aB\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ ab=0\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ ab=ab$, т. е. второе условие, которое мы получили прежде.

Решить, какой из обоих путей приводит быстрее к цели, можно всякий раз на основании предварительного разбора задачи.

Из логических условий можно получить дальнейшие (в общем частные) условия при помощи логического умножения любого логического уравнения $A = B$ на какое-нибудь выражение C, причем получим уравнение $AC=BC$. Чтобы доказать, что из $A=B$ в самом деле вытекает $AC=BC$, какие бы ни были выражения A, B, C, образуем произведение AC. Согласно правилу исключенного третьего должно быть: $AC=ACB\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ ACb$. В классе ACB подставим вместо A (согласно уравнению $A=B$) B и получим $ACb=BCb$. Но, согласно правилу перестановки, имеем: $BCb=CBb$, а, согласно правилу противоречия, $CBb=C0$. Но, как мы знаем, для любого класса X верно: $X0=0$, так что: $C0=0$. Однако, так как для любого X верно: $X\ {}^{\cdot}/_{\cdot}\ 0=X$, то в итоге получаем: $AC=ACB$. Тем же самым путем мы получим $BC=BCA$. Если к правой стороне последнего уравнения дважды применим правило перестановки, то получим: $BC=BCA=BAC=ACB$. Таким образом, мы получили два уравнения: $AC=ACB$ и

$BC=ACB$, из которых, согласно правилу подстановки, следует, что $AC=BC$, что и требовалось доказать. Обращаем внимание читателей на то, что в отличие от математики, где всякое уравнение разрешается сократить на любое, отличное от нуля, выражение, для логических уравнений это неверно. Здесь из $AC=BC$ не обязательно вытекает, что и $A=B$. Если, например, A — класс швейцарских гор, B — класс европейских гор, C — класс, определенный свойством «быть наивысшим», то уравнение $AC=BC$, т. е. «наивысшие швейцарские горы — это наивысшие европейские горы», по своему содержанию истинно, между тем как уравнение $A=B$, т. е. «швейцарские горы — это европейские горы», ложно, так как, кроме швейцарских, существуют и другие европейские горы.

Покажем теперь простое применение правила о почленном умножении обеих сторон логического уравнения. Пусть, например, дано для разложения класса A условие: $A=ABc \dot{/} AbC \dot{/} Abc$. Перемножая на выражение C, получаем $AC=(ABc \dot{/} AbC \dot{/} Abc)C$, однако правая часть этого уравнения, согласно правилу исключенного третьего, равна $ABcC \dot{/} AbCC \dot{/} AbcC=0 \dot{/} AbC \dot{/} 0=$ $=AbC$; таким образом, $AC=AbC$.

В некоторых задачах мы встретимся с вопросом, имеют ли два утверждения, или две группы утверждений, одинаковый смысл, иначе говоря, эквивалентны ли они, хотя их форма выражения различна. При решении этих задач исследуется, сохраняют ли эти различные утверждения (или группы утверждений) те же сочетания из всех вообще возможных сочетаний, а следовательно, исключают ли они те же сочетания или нет. Если нет, то они имеют различный смысл.

Например, если мы имеем три выражения X, Y, Z, то легко заметить, что условия (1) $X=XY$ и (2) $Y=YZ$, взятые вместе, эквивалентны с точки зрения логического смысла условиям (3) $X=XYZ$ и (4) $xX=xYZ$, взятым вместе. В самом деле, в полном наборе сочетаний выражений X, Y, Z, $XYZ \dot{/} XYz \dot{/} XyZ \dot{/} Xyz \dot{/} xYZ \dot{/} xYz \dot{/}$ $\dot{/} xyZ \dot{/} xyz$ условие (1) исключает третье и четвертое сочетания, а условие (2) исключает второе и шестое сочетания. Условие (3) исключает второе, третье и четвертое сочетания, а условие (4) — шестое сочетание. Если читатель возьмет, например, вместо X выражение «быть

кошкой», вместо Y — «быть млекопитающим», а вместо Z — «быть позвоночным», то получит наглядную иллюстрацию как логических условий, так и сохранившихся и исключенных сочетаний. В этом же примере взятые вместе условия (1) и (2) не эквивалентны условию (3).

3. Как уже сказано, в задачах этого типа мы выводим из данных условий другие условия (уравнения) при помощи подстановок. Покажем это на примере. Пусть даны условия (1) $A=AB$, (2) $B=BC$. Первое можно прочесть как «всякое A есть B», а второе — как «всякое B есть C» (читатель это легко поймет, так как, например, первое уравнение гласит: «A — это те A, которые суть одновременно B»). Если мы в уравнение (1) подставим вместо B выражение BC из уравнения (2), то получим $A=ABC$. Но в правой части этого уравнения можно, согласно (1), вместо AB подставить A и тогда получаем $A=AC$. Таким образом, мы получили правило: «если $A=AB$ и $B=BC$, то $A=AC$», которое носит в традиционной логике название модуса Barbara первой фигуры категорического силлогизма.

21. Злоумышленники

Время критического присутствия лиц *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* обозначим теми же буквами и будем их понимать как классы моментов времени. Условия, данные в задаче, запишутся тогда так:

(1) $А = АБв{}^{\cdot}/_{\cdot}АбВ.$

(2) $Г = ГдБВ{}^{\cdot}/_{\cdot}ГДбв.$

Разлагая правую часть (1) по *Г* и *Д*, получаем:

$$А = АБвГД{}^{\cdot}/_{\cdot}АБвГд{}^{\cdot}/_{\cdot}АБвгД{}^{\cdot}/_{\cdot}АБвгд{}^{\cdot}/_{\cdot}АбВГД{}^{\cdot}/_{\cdot}АбВГд{}^{\cdot}/_{\cdot}Абв\,гД{}^{\cdot}/_{\cdot}АбВгд.$$

Если сюда подставим вместо *Г* из (2), то исключатся сочетания первое, второе, пятое и шестое и, следовательно, останется:

$$А = АБвгД{}^{\cdot}/_{\cdot}АБвгд{}^{\cdot}/_{\cdot}АбВгД{}^{\cdot}/_{\cdot}АбВгд.$$

Ответ. *Г* не мог присутствовать при установке адской машины на путях, но никто другой не может доказать свое отсутствие.

22. Правильный или неправильный вывод!

Введем следующие обозначения: *М* — класс музыкантов по профессии; *У* — класс учителей по профессии.

Из опыта известно, что существуют все возможности ($А$) $МУ^{\cdot}/_{\cdot}Му^{\cdot}/_{\cdot}мУ^{\cdot}/_{\cdot}му$, т. е., что имеются учителя, являющиеся музыкантами (например, в консерватории), музыканты, не занимающиеся преподаванием, учителя, не являющиеся музыкантами, и, наконец, люди, которые не являются ни учителями, ни музыкантами. Следовательно, ни один из четырех классов не пуст.

Аналогично обстоит дело и во втором случае. Введем обозначения: $А$ — класс алюминиевых деталей; $Д$ — класс деталей машин.

Тогда все возможности исчерпаны выражением

$$(Б)\qquad АД^{\cdot}/_{\cdot}Ад^{\cdot}/_{\cdot}аД^{\cdot}/_{\cdot}ад$$

и, как показывает опыт, ни один из четырех классов не является пустым.

Наконец, введем обозначения: $П$ — класс процессов мышления; $С$ — класс суждений.

Однако здесь очевидно, что имеет место условие:

$$С = СП,$$

т. е. всякое суждение есть процесс мышления. Поэтому, если напишем аналогично, как прежде, все сочетания:

$$(Г)\qquad СП^{\cdot}/_{\cdot}СП^{\cdot}/_{\cdot}сП^{\cdot}/_{\cdot}сП^{\cdot}/_{\cdot},$$

то условие ($В$) исключает, будучи подставлено, второе сочетание, т. е. $Сп = 0$. Поэтому нельзя сделать вывод, что существуют суждения, которые не были бы процессами мышления. Все другие сочетания не пусты.

Обобщая, мы можем сказать, что если для каких-нибудь выражений X, Y, для которых всегда верно $XY^{\cdot}/_{\cdot}Xy^{\cdot}/_{\cdot}xY^{\cdot}/_{\cdot}xy$, существует условие, связывающее X и Y (причем $X \neq Y, X \neq 0$, $x \neq 0$, $Y \neq 0$, $y \neq 0$), например $X = XY$, или $X = xy$ и другие, то нельзя из существования класса Xy судить, что существует класс xY и наоборот.

Если какой-нибудь из классов Xy или xY не пуст, то легко указать условие, ведущее к тому, что другой из этих классов пуст.

1. Пусть $Xy \neq 0$. Тогда, чтобы было $xY = 0$, должно быть $Y = XY^{\cdot}/_{\cdot}xY = XY^{\cdot}/_{\cdot}0$, т. е. $Y = XY$.

2. Пусть $xY \neq 0$. Тогда, чтобы $Xy = 0$, должно быть $X = XY^{\cdot}/_{\cdot}Xy = XY^{\cdot}/_{\cdot}0$, т. е. $x = XY$.

В случае 1 удовлетворяет одинаково и условие $x = xy$, в случае 2 — условие $y = xy$.

23. Два объявления

Чтобы выяснить, имеют ли оба объявления одинаковый смысл, или хотя бы частично совпадают, запишем их в виде логических уравнений. Обозначения: A — находящиеся в области будущей плотины; B — выселяемые; C — перемещаемые.

Тогда все возможности будут:

$$ABC^{\cdot}/{}_{\cdot}ABc^{\cdot}/{}_{\cdot}AbC^{\cdot}/{}_{\cdot}Abc^{\cdot}/{}_{\cdot}aBC^{\cdot}/{}_{\cdot}aBc^{\cdot}/{}_{\cdot}abC^{\cdot}/{}_{\cdot}abc.$$

Первое объявление гласит:

$$BC = BCA.$$

Оно исключает пятое сочетание, т. е. aBC.

Второе объявление гласит:

$$b = ba, \quad c = cb.$$

Оно исключает второе, третье, четвертое и шестое сочетания.

Следовательно, каждое из этих объявлений гласит нечто другое. Как с первым, так и со вторым объявлением совместимы лишь сочетания ABC, abC и abc.

24. Фотография старинного замка

Введем следующие обозначения для классов мест, с которых видны:

Р — развалины замка;
Д — деревья;
Г — гостиница;
В — ворота;
Х — холм.

Условия задачи:

(1) *ДГ*=*ДГр* (если видны деревья и гостиница, то не видны развалины);
(2) *ДВ*=*ДВр* (если видны деревья и ворота, то не видны развалины);
(3) *гд*=*гдВрХ* (если не видны гостиница и деревья, то видны ворота и холм и не видны развалины, которые закрыл холм).

Так как в задаче спрашивается о таких фотографиях, на которых видны развалины, то достаточно написать разложение класса *Р* и исследовать, какие сочетания указанные три условия сохраняют. Мы имеем:

Р = РДГВХ·/·РДГВх·/·РДГвХ·/·РДГвх·/·РДгВХ·/·

·/·РДгВх·/·РДгвХ·/·РДгвх·/·РдГВХ·/·РдГВх·/·РдГвХ·/·

·/·РдГвх·/·РдгВХ·/·РдгВх·/·РдгвХ·/·Рдгвх.

После подстановок из уравнений (1), (2) и (3) исключаются сочетания от первого по шестое включительно и от тринадцатого по шестнадцатое включительно. Остаются сочетания:

РДгвХ, РДгвх, РдГВХ, РдГВх, РдГвХ, РдГвх.

Следовательно, имеется шесть видов фотографий, на которых видны развалины. Среди них два таких вида, где видны замок и ворота, но на них видна и гостиница.

25. Собаки лесничего

Обозначим время тренировки каждой собаки начальной буквой ее клички, т. е. *А*, *Б*, *Ц*, *Д*, *Р*, *Т*. Тогда время последовательного присутствия и отсутствия собак можно записать так:

АБЦДРТ, АБЦДрт, АБЦдрТ, абцдрТ, АБцДрт, аБцДРт, аБцДрт.

Предполагаемыми ситуациями относительно исчезновения мяса являются (см. задачу):

АБЦДРТ, АБЦдрТ, абцдрТ.

Очевидно, имеет место

Т = АБЦДРТ·/·АБЦдрТ·/·абцдрТ.

Ситуация, когда отсутствовала собака Рекс, была такова:

Тр = АБЦдрТ·/·абцдрТ.

Как видно, единственная собака, которая отсутствовала более продолжительно (в течение двух тренировок) при тренировке Тузика и которая могла быть виновной, это Дракон, так как отсутствующего Рекса жена лесничего видела гоняющимся за кошкой.

26. Карта и дороги

Обозначения: *А* — проезд через селение *А*; *Б* — проезд через селение *Б* и т. д.
Условия задачи:

$$(1)\ Бг = АВ^{\cdot}/_{\cdot}ab,\quad (2)\ АБ = АБв,\quad (3)\ АБ = АБг.$$

Разложим *АБ* так:

$$АБ = \overset{3}{АБВГ}{}^{\cdot}/_{\cdot}\overset{2}{АБВг}{}^{\cdot}/_{\cdot}\overset{1}{АБвГ}{}^{\cdot}/_{\cdot}\overset{2,3}{АБвг},$$

где над соответствующими сочетаниями сделаны указания на уравнения, которые эти сочетания исключают.

Подобно этому имеем

$$аБ = аБВГ^{\cdot}/_{\cdot}\overset{1}{аБВг}{}^{\cdot}/_{\cdot}\overset{1}{аБвГ}{}^{\cdot}/_{\cdot}аБвг;$$

значит, по дороге, проходящей через *Б*, но не проходящей через *А*, можно попасть в селенья *В* и *Г*.

Остальные возможности проехать, хотя бы тремя селениями, таковы:

$$АБВг,\ АБвГ,\ АбВГ.$$

Однако первые две исключаются условием (2) или же (3). Остается еще возможность избрать дорогу через *А*, не проходящую через *Б*.

Итак, при данном состоянии дорог нельзя проехать сразу через все названные селения. Можно посетить *Б*, *В*, *Г*, минуя при этом *А*, или же посетить *А*, *В*, *Г*, минуя *Б*. Карта годных для проезда дорог могла бы, например, выглядеть так, как указано на рис. 4.

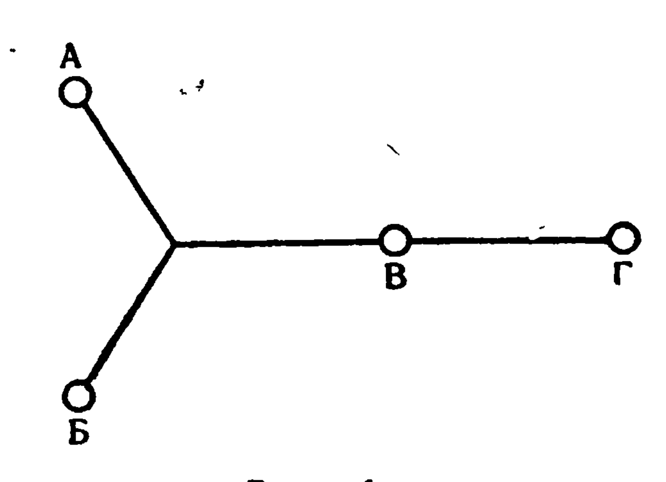


Рис. 4

27. Добросовестные работники

Обозначим классы соответствующих людей: *Ц* — кто был в цехе; *Р* — работающих; *О* — ответственных. Тогда первое высказывание запишется так:

(1) *Ц* = *ЦРО*,

второе высказывание:

(2) *Ро* = *Роц*.

Все возможности будут:

ЦРО˙/.ЦРо˙/.ЦрО˙/.Цро˙/.цРО˙/.цРо˙/.црО˙/.цро.

Условие (1) исключает сочетания *ЦРо, ЦрО, Цро*, между тем как условие (2) исключает сочетание *ЦРо*. Следовательно, смысл утверждений первого из друзей иной, чем смысл утверждения второго. Первое утверждение более точно, так как утверждение второго не исключает присутствия в цехе лиц, которые хотя и не работали, но могли быть либо ответственными, либо неответственными. Что же касается тех, кто работал вне данного цеха, то оба друга допускают для них все остающиеся возможности.

28. Сообщение о лекции

Обозначения: *Ж* — железо в нашем организме, *Н* — встречающееся в незначительном количестве, *П* — поддерживающее **жизнь**.

Первое утверждение:

(1) *Ж* = *ЖН*, (2) *Ж* = *ЖП*.

Второе утверждение:

(3) *ЖН* = *ЖП*.

Все возможности:

ЖНП˙/.ЖНп˙/.ЖнП˙/.Жнп˙/.жНП˙/. жНп˙/.жнП˙/.жнп.

Условия (1) и (2) исключают второе, третье и четвертое сочетания, между тем как условие (3) исключает лишь второе и третье сочетания.

Следовательно, эти высказывания имеют различный смысл, причем утверждение (3) допускает существова-

ние в организме железа, имеющегося в неограниченном количестве, но не являющегося необходимым для поддержания жизни.

29. У телевизора

Промежутки времени, когда лица, названные в задаче, смотрят телевидение, обозначим начальными буквами их имен: *А*, *В*, *Г*, *Д*, *Ж*. Условия задачи:

(1) *А* = *АВ*, (2) *дж* = 0, (3) *ВГ*'/.*вг* = 0,

(4) *Гд*'/.*гД* = 0, (5) *Ж* = *ЖАД*.

Запись условий (2) и (4) может показаться читателю непривычной. Однако (2) исключает случай, когда ни Даша, ни Женя не смотрели телевизор, а (4) исключает случай, когда смотрел либо один Глеб, либо одна Даша.

Все возможности будут:

3	3	3, 4, 5	2, 3, 4	4
АВГДЖ'/.	*АВГДж*'/.	*АВГдЖ*'/.	*АВГдж*'/.	*АВгДЖ*'/.
1	1	1, 4, 5	1, 2, 4	1, 4
'/.*АвГДЖ*'/.	*АвГДж*'/.	*АвГдЖ*'/.	*АвГдж*'/.	*АвгДЖ*'/.
3, 5	3	4, 5	2, 4	4, 5
'/.*аВГДЖ*'/.	*аВгДж*'/.	*аВГдЖ*'/.	*аВГдж*'/.	*аВгдЖ*'/.
5		4, 5	2, 4	4,5
'/.*авГДЖ*'/.	*авГДж*'/.	*авГдЖ*'/.	*авГдж*'/.	*авгДЖ*'/.

Над каждым исключенным сочетанием здесь записан номер того уравнения или тех уравнений, которые приводят к его исключению. Единственное сочетание, которое не исключается одним из условий (1) — (5), является, следовательно, *авГДж*.

Ответ. Глеб и Даша смотрят постоянно, другие не смотрят.

30. Военный флот

Обозначения: *В* — военный; *П* — паровой; *К* — корабль английского флота; *С* — находящийся в Средиземном море.

Условие задачи записывается так:

ВПК = ВКС˙/.ПКс.

Умножая обе части этого равенства на *в*, получаем

вВПК = вВКС˙/.вПКс,

откуда

0=0˙/.*вПКс,*

следовательно,

вПКС =0.

Невоенные паровые корабли английского флота вне Средиземного моря не существуют. Отсюда ответ на первый вопрос: всякий паровой корабль английского флота вне Средиземного моря является военным кораблем.

   4   5   2
˙/.*АВгДж*˙/.*АВгдЖ*˙/.*АВгдж*˙/.

   1, 4   1, 5   1, 2
˙/.*АвгДж*˙/. *АвгдЖ*˙/.*Авгдж*˙/.

   4   5   2
˙/.*аВгДж*˙/.*аВгдЖ*˙/.*аВгдж*˙/.

   4   5   2
˙/.*авгДж*˙/.*авгдЖ*˙/.*авгдж.*

Далее имеем:

вПК = вПКС˙/.вПКс,

но, согласно предыдущему,

вПК = вПКС˙/.0,

или

вПк = вПКС,

т. е. английские невоенные паровые корабли находятся только в Средиземном море.

31. Капитан и рулевой

Обозначим соответствующие классы (которые мы понимаем как классы промежутков времени): *А* — нахож-

дение на судне; B — присутствие капитана; C — присутствие рулевого; X — присутствие груза; Y — выгрузка груза.

В задаче даны условия:

(1) $BAXY=0$, (2) $XycA=XycAb$

и, кроме того, очевидно, имеет место (3) $xY=0$.

Из (1) следует, что $BAX=BAXy$, а следовательно, и $BAXc=BAXyc$. Если мы в правую часть этого уравнения подставим из условия (2), то получим: $BAXc=BAXycb=$ $=0$, т. е. $BAXc=0$; $BAX=BAXC$ как первый результат. Разложив cA по B, X, Y, получим

$$cA=cABXY\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cABXy\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cABxY\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cABxy\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}$$
$${}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cAbXY\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cAbXy\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cAbxY\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cAbxy.$$

Первое сочетание исключается в силу (1), второе — в силу (2), третье и седьмое — в силу (3). Таким образом, получаем

$$cA=cABxy\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cAbXY\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cAbXy\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cAbxy$$

или, использовав правило исключенного третьего, имеем:

$$cA=cABxy\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cAbX\,{}^{\cdot}\!/\!{}_{\cdot}\,cAby$$

как второй результат.

Рулевой находится на судне только тогда, когда на судне находятся капитан и груз. Рулевой не находится на судне, когда на нем, хотя и находится капитан, но нет груза, или когда там имеется груз, но нет капитана, или же когда там нет капитана, и судно не разгружается.

32. Грудные дети

Обозначения: $Г$ — грудные дети; $Л$ — логически мыслящие лица; $П$ — лица, презираемые нами; K — лица, способные справиться с крокодилом.

Условия задачи:

(1) $Г=Гл$, (2) $K=Kп$, (3) $л=лП$.

Подставляя из (3) в (1), получаем:

(4) $Г=ГлП$.

Из (2) следует

(2′) *П=Пк.*

(Доказательство: *П=ПК˙/.Пк*, но если сюда подставим из (2), то получим: *П=ПК̇п˙/.Пк=0˙/.Пк = Пк.*)
Из (2′) подставим в (4), что дает:

(5) *Г = ГлПк.*

Вместо *лП* подставим из (3), и получим:

(6) *Г = Глк,*

наконец, вместо *Гл* подставим из (1), и получим:

(7) *Г = Гк,*

что является требуемым результатом.

33. Рыбы

Обозначение классов: *А* — акулы; *В* — не сомневающиеся в своем вооружении; *Р* — рыбы; *К* — умеющие танцевать кадриль; *С* — заслуживающие сострадания; *З* — имеющие хотя бы три ряда зубов; *Л* — ласковые к детям; *Т* — тяжелые.

Запись условий.

(1) *А = АВ*, (2) *Рк = РкС*, (3) *Ра=Рав*, (4) *Ра=Рал*

(5) *РТ = РТк*, (6) *РА = РАс.*

Как и в предыдущем примере, мы могли бы требуемый вывод *РТ=РТЛ* получить путем последовательных подстановок из условий (1—6), что предоставим сделать читателю. Здесь же мы применим другой способ механического характера. Разложим класс *РТ*, о котором говорится в выводе, по *А, В, К, С, З, Л*. Получим 64 сочетания, из которых некоторые исключаются в силу условий (1—6).

```
      5,6            5,6            3,5           3,5
РТ=РТАВКСЗЛ˙/.РТАВКСЗл˙/.РТАВКСзЛ˙/.РТАВКСзл˙/.
  5             5              3,5           3,5
˙/.РТАВКсЗЛ˙/.РТАВКсЗл˙/.РТАВКсзЛ˙/.РТАВКсзл˙/.
  6             6              3             3
˙/.РТАВкСЗЛ˙/.РТАВкСЗл˙/.РТАВкСзЛ˙/.РТАВкСзл˙/.
```

2 2 2, 3 2, 3
'/. РТАВксЗЛ '/. РТАВксЗл '/. РТАВксзЛ '/. РТАВксзл '/.

1, 5, 6 1, 5, 6 1, 5 1, 5
'/. РТАвКСЗЛ '/. РТАвКСЗл '/. РТАвКСзЛ '/. РТАвКСзл '/.

1, 5 1, 5 1, 5 1, 5
'/. РТАвКсЗЛ '/. РТАвКсЗл '/. РТАвКсзЛ '/. РТАвКсзл '/.

1, 6 1, 6 1 1
'/. РТАвкСЗЛ '/. РТАвкСЗл '/. РТАвкСзЛ '/. РТАвкСзл '/.

1, 2 1, 2 1, 2 1,2
'/. РТАвксЗл '/. РТАвксЗл '/. РТАвксзЛ '/. РТАвксзл '/.

5, 6 4, 5, 6 3, 5 3, 4, 5
'/. РТаВКСЗЛ '/. РТаВКСЗл '/. РТаВКСзЛ '/. РТаВКСзл '/.

5 4, 5 3, 5 3, 4, 5
'/. РТаВКсЗЛ '/. РТаВКсЗл '/. РТаВКсзЛ '/. РТаВКсзл '/.

6 4, 6 3 3, 4
'/. РТаВкСЗЛ '/. РТаВкСЗл '/. РТаВкСзЛ '/. РТаВкСзл '/.

2 2, 4 3 3, 4
'/. РТаВксЗЛ '/. РТаВксЗл '/. РТаВксзЛ '/. РТаВксзл '/.

5, 6 4, 5, 6 5 4, 5
'/. РТавКСЗЛ '/. РТавКСЗл '/. РТавКСзЛ '/. РТавКСзл '/.

5 4, 5 5 4, 5
'/. РТавКсЗЛ '/. РТавКсЗл '/. РТавКсзЛ '/. РТавКсзл '/.

6 4, 6 4
'/. РТавкСЗЛ '/. РТавкСЗл '/. РТавкСзЛ '/. РТавкСзл '/.

3 2, 4 2 2, 4
'/. РТавксЗЛ '/. РТавксЗл '/. РТавксзЛ '/. РТавксзл.

Над каждым исключением сочетанием написаны номера условий (1) — (6), исключающих его. Единственным сочетанием, которое не исключается ни одним из этих условий, является *PТавкСзЛ*, а поэтому мы имеем:

$$PT = PTавкСзЛ.$$

Это уравнение удовлетворяет требованиям вывода, а именно: тяжелые рыбы ласковы к детям, и, кроме того, оно указывает, что такие рыбы имеют следующие свойства: это не акулы, они не сомневаются в своем вооружении, не умеют танцевать кадриль, достойны сострадания и не имеют хотя бы трех рядов зубов. Так как никаких тяжелых рыб, которые не имели бы этих свойств, не существует, наш вывод совпадает с тем, который указан в задаче.

34. Цветные флажки

Введем обозначения: A — класс промежутков времени, когда виден красный флажок; B — класс промежутков времени, когда виден желтый флажок; C — класс промежутков времени, когда виден зеленый флажок; D — класс промежутков времени, когда виден синий флажок.

Так как это не ведет к путанице, обозначим теми же буквами и сами флажки.

Условия задачи:

(1) $A = ABC\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,AcD$, (2) $a = abCD$.

Все возможности таковы:

$$ABCD\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,ABCd\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,ABcD\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,ABcd\,{}^{\cdot}/_{\cdot}$$

$${}^{\cdot}/_{\cdot}\,AbCD\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,AbCd\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,AbcD\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,Abcd\,{}^{\cdot}/_{\cdot}$$

$${}^{\cdot}/_{\cdot}\,aBCD\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,aBCd\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,aBcD\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,aBcd\,{}^{\cdot}/_{\cdot}$$

$${}^{\cdot}/_{\cdot}\,abCD\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,abCd\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,abcD\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,abcd.$$

Уравнение (1) исключает четвертое, пятое, шестое и восьмое сочетания, а уравнение (2) исключает девятое, десятое, одиннадцатое, двенадцатое, четырнадцатое, пятнадцатое и шестнадцатое сочетания. Следовательно, остаются

$$ABCD,\ ABCd,\ ABcD,\ AbcD,\ abcD.$$

По последним двум сочетаниям можно заключить, что красный, желтый и зеленый флажки находятся на шестах, поставленных в точках, лежащих на одной прямой. В самом деле, либо виден лишь флажок *A*, тогда как *B* и *C* закрыты, либо виден лишь флажок *C*, а *A* и *B* закрыты. Но точка, в которой поставлен шест с синим флажком, не лежит на этой прямой, так как в обоих случаях *D* виден. Среди мест, с которых видны *A*, *B*, *C*, имеется и такое, где *C* закрывает *D* (см. второе сочетание), *B* закрывает *D* и *A* закрывает *D*. Среди мест, с которых видны *A* и *B*, имеется и такое, где *D* закрывает *C* (см. третье сочетание). Кроме того, существует произвольно много мест, откуда видны все флажки (см. первое сочетание).

Чертеж фигуры, образованной точками, в которых поставлены шесты с флажками, примерно следующий:

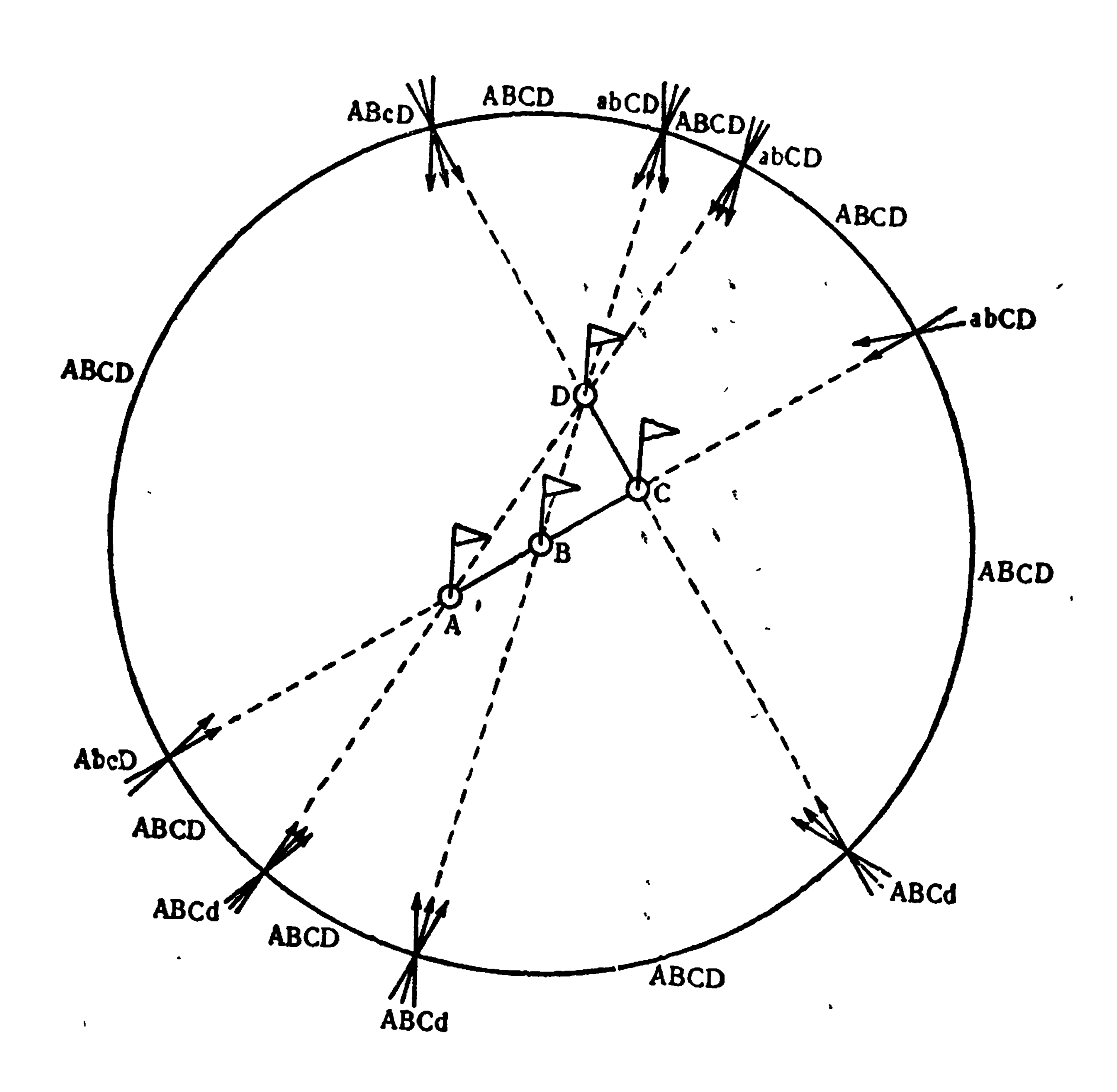


Рис. 5

35. Четырехгранная призма

Если назвать классы промежутков времени, когда видны грани *А*, *Б*, *В*, *Г*, теми же буквами, то можно условия задачи записать так:

(1) *АБГ* = *АБвГ*, (2) *В* = *Вабг*, (3) *БГ* = *АБГ*.

Из полного набора возможностей («полный логический алфавит» задачи)

АБВГ / *АБВг* / *АБвГ* / *АБвг* / *АбВГ* / *АбВг* / *АбвГ* / *Абвг* /

/ *аБВГ* / *аБВг* / *аБвГ* / *аБвг* / *абВг* / *абВГ* / *абвГ* / *абвг*

видно, что условие (1) исключает первое сочетание, условие (2) исключает второе, пятое, шестое, девятое, десятое и тринадцатое сочетания, а условие (3) исключает одиннадцатое сочетание.

Решению удовлетворяет следующая трапеция:

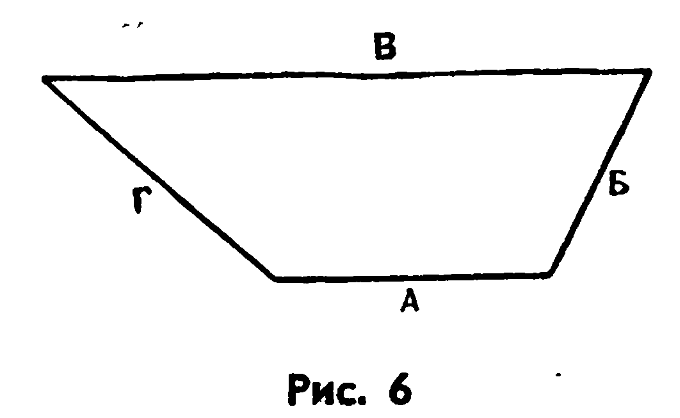


Рис. 6

Интересно истолкование тех сочетаний, в которых встречается лишь один символ грани (остальные не видны); это сочетания: *Абвг, аБвг, абБг* и *абвГ*, они осуществляются при сравнительно большом приближении глаза к этой грани, когда остальные грани уже не видны. Об этих видах в задаче не говорится.

36. Рычаг и кнопка

Обозначения: $И_1$ — искрение в предыдущую минуту; $И_2$ — искрение в следующую минуту; $В_1$ — вибрация в

предыдущую минуту; B_2 — вибрация в следующую минуту; P — рычаг включен; $К$ — кнопка нажата.

Все это классы промежутков времени, в которых что-то осуществляется, между тем как соответствующие им $и_1$, $и_2$, $в_1$, $в_2$, p, $к$ — это классы промежутков времени, когда что-то не осуществляется.

Условия задачи:

(1) $и_1 p = B_1 B_2 {}^{\cdot}/_{\cdot} в_1 в_2$;

(2) $P B_1 = в_2$;

(3) $P в_1 = B_2$;

(4) $К = И_2 B_1 {}^{\cdot}/_{\cdot} и_2 в_1$;

(5) $к = И_2 в_1 {}^{\cdot}/_{\cdot} и_2 в_1$.

Требуемое состояние: $B_1 И_1 в_2 и_2$.
Это выражение разложим по P и $К$, получая

$$B_1 И_1 в_2 и_2 = B_1 И_1 в_2 и_2 P К {}^{\cdot}/_{\cdot} B_1 И_1 в_2 и_2 P к {}^{\cdot}/_{\cdot} B_1 И_1 в_2 и_2 p К {}^{\cdot}/_{\cdot} B_1 И_1 в_2 и_2 p к.$$

Условия (1) и (3) нельзя использовать для подстановки, так как ни левые, ни правые части этих условий в наших сочетаниях не встречаются. Подстановкой (2) исключаются третье и четвертое сочетания, подстановкой (4) исключается первое сочетание, подстановкой (5) не исключается второе сочетание, единственно оно сохраняется.

Ответ:

$$B_1 И_1 в_2 и_2 = B_1 И_1 в_2 и_2 P к,$$

т. е. рычаг необходимо нажать, а кнопку — не надо.

37. Уравнения для букв

Заполним шахматную доску сочетаниями выражений $А$, $Б$, $В$, $Г$, $Д$, $Е$ и их отрицаний:

абвгде'/.абвгдЕ'/.абвгДе'/.абвгДЕ'/.абвГде'/.

'/.абВгде'/.абВгдЕ'/.абВгДе'/.абВгДЕ'/.абВГде'/

'/.аБвгде'/.аБвгдЕ'/.аБвгДе'/.аБвгДЕ'/.аБвГде'/

'/.аБВгде'/.аБВгдЕ'/.аБВгДе'/.аБВгДЕ'/.аБВГде'/

'/.Абвгде'/Абвгд Е'/Абвг Де'/.Абвг ДЕ'/.АбвГде'/

'/.АбВгде'/.АбВгдЕ'/.АбВгДе'/.АбВгДЕ'/.АбВГде'/

·/.АБвгде'/.АБвгдЕ'/.АБвгдЕ'/.АБвгдЕ'/.АБвГде'/.

'/.АБВгде'/.АБВгдЕ'/.АБВгДе'/.АБВгДЕ'/.АБВГде'/

Подчеркнутые сочетания образуют форму буквы *В*. Чтобы эти поля остались, необходимо исключить все остальные при помощи логических уравнений, а именно:

(1) *абв=абвг*. Это уравнение исключает последние четыре сочетания первой строки, сохраняя первые четыре;

(2) *абВ=абВгде'/.абВГде*, или *абВ=абВде*. Это уравнение исключает во второй строке все сочетания, кроме первого и пятого.

(3) *аБв=аБвгде'/.аБвГде*, или *аБв=аБвде*;

(4) *аБВ=аБВг*;

(5) *Абв=Абвгде'/.АбвГде*, или *Абв=Абвде*;

(6) *АбВ=АбВгде'/.АбВГде*, или *АбВ=АбВде*;

(7) *АБв=АБвг*;

(8) *АБВ*=0.

Эти восемь уравнений вполне определяют форму буквы *В*. Читатель сам сможет составить уравнения, определяющие форму букв *М*, *Т* и других.

Задача, которую мы здесь решили, не просто забава. Представим себе экран телевизора, имеющий 64 поля, которые могут быть заняты белым или черным цветом. Если бы на экране должны были появляться буквы, то программа должна содержать предписание, каким цветом какое поле занять, а это сделали бы возможным как раз наши логические уравнения. При увеличении числа полей (например, для 1024 полей понадобилось бы 10 уравнений) можно было бы не только изобразить самые различные фигуры, но и создать иллюзию движения, пе-

˙/. абвГдЕ˙/. абвГДе˙/. абвГДЕ˙/.

˙/. абВГдЕ˙/. абВГДе˙/. абВГДЕ˙/.

˙/. аБвГдЕ˙/. аБвГдЕ˙/. аБвГДЕ˙/.

˙/. аБВГдЕ˙/. аБВГДе˙/. аБВГДЕ˙/.

˙/. АбвГдЕ˙/. АбвГДе˙/. АбвГДЕ˙/.

˙/. АбВГдЕ˙/. АбВГДе˙/. АбВГДЕ˙/.

˙/. АБвГдЕ˙/. АБвГДе˙/. АБвГДЕ˙/.

˙/. АБВГдЕ˙/. АБВГДе˙/. АБВГДЕ

рехода одних фигур в другие. Подобный метод используют для светящихся надписей.

38. Сигнальная установка

Обозначим: класс промежутков времени, когда горит красный свет — *A*; когда горит зеленый свет — *B*; когда горит желтый свет — *C*. Наблюдаемые сочетания:

(1) *ABC*, (2) *AbC*, (3) *aBC*, (4) *aBc*, (5) *abC*.

Следовательно, можно написать

A = *ABC*˙/. *AbC*, т. е. *A* = *AC*;

a = *aBC*˙/. *aBc*˙/. *abC*, т. е. *a* = *a*(*B*˙/. *C*).

Итак, электрическая сеть в установке должна иметь следующие два свойства: контакт, включающий красный свет, включает одновременно и желтый свет, причем зеленый свет может, но не обязательно должен гореть. Контакт, выключающий красный свет, включает одновременно желтый или зеленый.

Из данных сочетаний можно вывести закономерности сети в установке и для других сигналов.

Так, для *B*:

B = *BAC*˙/. *BaC*˙/. *Bac*, т. е. *B* = *BC*˙/. *Ba* = *B*(*C*˙/. *a*);

b = *bAC*˙/. *baC*; т. е. *b* = *bC*.

Для *C*:

C = *CAB*˙/. *CAb*˙/. *CaB*˙/. *Cab*;

c = *caB*.

Истолкование этих уравнений такое же, как и для A. Например, последние два уравнения показывают, что желтый свет может гореть как с двумя остальными вместе, так и с каждым в отдельности, или один. Если желтый свет не горит, должен гореть зеленый.

39. Семафоры и стрелки

Обсуждение возможных обстоятельств.

Семафор Γ_1 не может показывать «свободен», когда положение B_2 давало бы возможность въезда на ветку $Б$. Но он также не может показывать «свободен», когда B_1 давало бы возможность въезда на $Б$. Семафоры Γ_1 и Γ_2 не могут одновременно показывать «свободен», что очевидно само собой. Семафор Γ_2 не может показывать «свободен», когда положение B_1 давало бы возможность движения по A.

Обозначения: M — класс промежутков времени, когда Γ_1 преграждает доступ к ветке $Б$; H — класс промежутков времени, когда Γ_2 преграждает доступ к ветке $Б$; Π — класс промежутков времени, когда положение B_1 делает возможным движение по A; P — класс промежутков времени, когда B_2 делает возможным движение по A.

Для Γ_1 получаем, путем разложения, условие для положений «свободен» и «стой»:

$$м = мНПР \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} \overset{3}{мНПр} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} мНпР \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} \overset{3}{мНпр} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}}$$
$$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} \overset{1}{мнПР} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} \overset{1}{мнПр} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} \overset{1}{мнпР} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} \overset{1}{мнпр}.$$

Над соответствующими сочетаниями указаны уравнения, исключающие эти сочетания. Эти уравнения, выражающие условия, которые мы высказали при обсуждении возможных обстоятельств, гласят:

(1) $мн=0$, (2) $н\Pi=0$, (3) $мр=0$, (4) $мп=0$.

Таким образом, имеем

$$м = мНПР \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} мНпР = мНР.$$

Аналогично получим для M:

$$M = МНПР \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} МНПр \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} МНпР \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} МНпр \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}}$$
$$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} \overset{2}{МнПР} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} \overset{2}{МнПр} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} МнпР \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} Мнпр,$$

а после упрощения $M = МН \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{/}} МНп$.

Для Γ_2 получим аналогично

$$н = \overset{2}{нМПР}\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,\overset{2}{нМПр}\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,нМпР\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,нМпр\,{}^{\cdot}/_{\cdot}$$
$${}^{\cdot}/_{\cdot}\,\overset{1}{нмПР}\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,\overset{1}{нмПр}\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,\overset{1}{нмпР}\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,\overset{1}{нмпр};$$

откуда $$н = нМпР\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,нМпр = нМп;$$

$$Н = НМПР\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,НМПр\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,НМпР\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,НМпр\,{}^{\cdot}/_{\cdot}$$
$${}^{\cdot}/_{\cdot}\,НмПР\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,\overset{3}{НмПр}\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,\overset{4}{НмпР}\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,\overset{3}{Нмпр};$$

а следовательно, $Н = НМ\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,НмПР$.

Из условий (1)—(4) получим также уравнения, характеризующие деятельность устройств, приводящих в действие семафоры Γ_1, Γ_2 и стрелки $В_1$, $В_2$. Например, из уравнения (1): $мн\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,Мн = 0\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,Мн$, а поэтому $н = Мн$; аналогично из (3): $р = Мр$; из (4): $п = Мп$, также из (1): $мн\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,мН = 0\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,мН$, а поэтому $м = мН$ и т. д.

Совокупность этих условий дает возможность спроектировать электрическую сеть, которая осуществляет требуемое функционирование Γ_1, Γ_2, $В_1$, $В_2$.

40. Три машины. Первый вариант

а) 1. Работающую часть машины $А$ обозначим $А$, аналогично и у $Б$ и $В$. Тогда условия запишутся так:

(1) $А = АБ$, (2) $Б = БВ$.

Для $а$:

$$а = аБВ\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,аБв\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,абВ\,{}^{\cdot}/_{\cdot}\,абв.$$

Второе сочетание исключается условием (2). Но из требования, предъявляемого агрегату, вытекает, что $аВ = 0$, а поэтому отпадают и первое, и третье сочетания, остается $а = абв$. Из $аВ = 0$ следует, что $В = АВ$ — третье условие, которое вместе с (1) и (2) определяет совместную работу трех машин.

а) 2. Эту же задачу можно решить при помощи логики высказываний. Высказывание «Машина $А$ (сейчас) работает» обозначим через $А$, и аналогично для $Б$ и $В$.

Составим таблицу всех возможных сочетаний значений истинности высказываний *А*, *Б*, *В*:

А	*Б*	*В*
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Условие (1) можно записать так:
(1′) $\overline{А\&\overline{Б}}$, условие (2) как (2′) $\overline{Б\&\overline{В}}$.

В таблице мы должны, следовательно, вычеркнуть те сочетания значений, которые отвечают выражениям, находящимся под главным знаком отрицания в (1′) и (2′). Значит, мы вычеркиваем третью и четвертую строки (условие (1′)) и вторую и шестую (условие (2′)). Условие: когда отказывает машина *А*, не работает и машина *В*, выразим тем, что вычеркнем строки пятую и седьмую. Таким образом, предыдущая таблица свелась к двум строкам:

А	*Б*	*В*
1	1	1
0	0	0

Отсюда ясно, что машины должны быть устроены так, чтобы либо все вместе работали, либо все вместе не работали. Легко убедимся, что этот результат совпадает с тем, к которому мы пришли, применив логику классов.

б) Здесь, как и в а):

$$a = аБВ \mathbin{{}^{\cdot}\!/_{\!\cdot}} аБв \mathbin{{}^{\cdot}\!/_{\!\cdot}} абВ \mathbin{{}^{\cdot}\!/_{\!\cdot}} абв,$$

причем второе сочетание исключено условием (2). Чтобы машина *В* могла работать и тогда, когда машина *А* не работает, должно быть $абв = 0$.

Тогда:

$$абв \mathbin{{}^{\cdot}\!/_{\!\cdot}} абВ = абВ, \quad аб = абВ.$$

Всегда, когда обе машины *А* и *Б* одновременно не работают, работает машина *В*. Машина *В* может работать вместе с *Б*, но машина *Б* одна работать не может.

Из всего рассуждения следует, что для *В*:

$$В=АБВ^{\cdot}/_{\cdot}аБВ^{\cdot}/_{\cdot}абВ,$$

значит

$$В=АБВ^{\cdot}/_{\cdot}аВ.$$

К тому же результату можно прийти при помощи логики высказываний, как показано в а) 2.

41. Три машины. Второй вариант

Обозначения: *А* — деятельность машины *А*; *Б* — деятельность машины *Б*.

Символическая запись условий задачи: *АБв*, *аБВ*, *АбВ* (самая общая формализация).

Из данных условий вытекает для деятельности *А* условие:

$$(1)\ А=АБв^{\cdot}/_{\cdot}АбВ,$$

для бездеятельности $а=аБВ$.

Разлагая класс *В* по *А* и *Б*, получаем

$$В=АБВ^{\cdot}/_{\cdot}АбВ^{\cdot}/_{\cdot}аБВ^{\cdot}/_{\cdot}абВ,$$

где условие (1) исключает первое, а условие (2) — последнее сочетание; таким образом, остается

$$В=АбВ^{\cdot}/_{\cdot}аБВ.$$

Аналогично

$$в=АБв^{\cdot}/_{\cdot}Абв^{\cdot}/_{\cdot}аБв^{\cdot}/_{\cdot}абв,$$

где (1) исключает второе, а (2) — третье и четвертое сочетания, остается $в=АБв$.

Наконец,

$$Б=АБВ^{\cdot}/_{\cdot}АБв^{\cdot}/_{\cdot}аБВ^{\cdot}/_{\cdot}аБв,$$

где (1) исключает первое, а (2) — четвертое сочетания,

$$б=АбВ^{\cdot}/_{\cdot}Абв^{\cdot}/_{\cdot}аБв^{\cdot}/_{\cdot}абв,$$

где (1) исключает второе, а (2) — третье и четвертое сочетания.

Машина *В* работает, следовательно, всегда только с одной из остальных машин и не работает, когда *А* и *Б*

работают. Возможность *АБВ* исключена, и ни одна машина не работает одна.

42. Производство и контроль качества

Обозначения: *А* — класс хорошо обработанных винтов; *Б* — класс винтов из хорошего материала.

Совокупность всех возможностей:

АБ˙/.Аб˙/.аБ˙/.аб.

В первом случае, приведенном в задаче,

Аб = 0 и *аБ* = 0.

Тогда:

(1) *Аб˙/.АБ* = 0˙/.*АБ*, т. е. *А* = *АБ*,

(2) *аБ˙/.АБ* = 0˙/.*АБ*, т. е. *Б* = *АБ*.

Из совместного рассмотрения уравнений (1) и (2) получаем: *А*=*Б*, а также *а*=*б*.

Класс винтов хорошо обработанных, тождествен с классом винтов, изготовленных из хорошего материала. Автомат, хотя и допускал бы производство винтов из плохого материала, но они обработаны были бы плохо. Такой автомат был бы довольно хорошо устроен, так как он и сортировал бы материал: брак получался бы только из плохого материала.

Во втором случае мы имеем лишь *Аб*=0, а поэтому может быть также: *А*=*АБ*.

Все хорошо обработанные винты были из хорошего материала, но автомат допускал бы также производство винтов плохо обработанных, но сделанных из хорошего материала, а следовательно, расточал бы материал.

43. Производственная линия

Хорошую работу машин (как классы соответствующих промежутков времени) обозначим последовательно через *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Условия задачи:

$$A = AB;\ B = BC;\ C = CD;\ D = DE.$$

Предварительно докажем вспомогательное предложение о том, что из $X=XY$ следует, что $y=yx$.

Доказательство.

Имеет место *y*=*yX*˙/.*yx*. Подставляя вместо $X=XY$, получим *y*=*yXY*˙/.*yx*=0˙/.*yx*, т. е. $y=yx$.

Разберем теперь случай 1, т. е. отказ машины D, т. е. когда имеем d, или же, поскольку $C=CD$, то, согласно вспомогательному предложению, имеет место также $d=dc$, т. е. отказ четвертой машины сопровождается отказом третьей машины. Но так как далее $B=BC$, то и $c=cb$, аналогично получаем $b=ba$. Подстановкой в $d=dc$ вместо $c=cb$ получим: $d=dcb$, а подстановкой сюда вместо $b=ba$ получим $d=dbca$. Иначе говоря, отказ четвертой машины сопровождается отказом третьей, второй и первой машин.

Аналогично, разбор случая 2 показывает, что отказ последней машины сопровождается отказом всех остальных, а разбор случая 3,— что отказ второй машины сопровождается отказом первой.

В случае 4, если откажет первая машина, то любая последующая может хорошо работать. Уже для второй машины $B=BA \vee Ba$, т. е. деятельность второй машины возможна как при деятельности первой, так и при ее бездеятельности.

44. Передача сообщений

Из условий задачи вытекает, что недопустимыми, т. е. ненадежными, являются все сочетания букв, содержащие сочетания BDe, CDe, $ABDE$, $ACDE$. Отсюда следуют условия:

$$(1)\ BDe = 0,\ (2)\ CDe = 0,\ (3)\ ABDE = 0,$$

$$(4)\ ACDE = 0.$$

Согласно правилу исключенного третьего, разложим левые части этих уравнений по отсутствующим в них буквам (например, первое по A и C) и получим:

$$(1')\ BDeAC \vee BDeAc \vee BDeaC \vee BDeac = 0;$$

$$(2')\ CDeAB \vee CDeAb \vee CDeaB \vee CDeab = 0;$$

$$(3')\ ABCDE \vee ABcDE = 0;$$

$$(4')\ ABCDE \vee AbCDE = 0.$$

Логическая сумма классов, написанных в левых частях последних четырех уравнений, может быть пустой только тогда, когда пуст каждый из слагаемых классов.

Отсюда вытекает, что слова, которые надо исключить из передачи, следующие:

$ABCDx$, $ABxDx$, $xBCDx$, $xBxDx$ из (1′),
$ABCDx$, $AxCDx$, $xBCDx$, $xxCDx$ » (2′),
$ABCDE$, $ABxDE$ » (3′),
$ABCDE$, $AxCDE$ » (4′).

Среди этих 12 слов три слова повторяются дважды, а поэтому исключить нужно лишь девять слов, а именно:

$ABCDx$, $ABxDx$, $xBCDx$, $xBxDx$, $AxCDx$, $xxCDx$,
$ABCDE$, $ABxDE$, $AxCDE$.

Всех возможных слов имеется 32, следовательно, для надежной передачи остается 23 слова.

в. ЗАДАЧИ С ЭЛЕМЕНТАМИ АРИФМЕТИКИ

Введение в арифметическое применение логики классов

Если символы $A, B, C, ..., X, Y, Z$ и их отрицания $a, b, c, ..., x, y$ обозначают какие-либо логические классы, имеющие конечное число элементов, тогда удается полезно применить аппарат логики классов к арифметическим задачам, в которых требуется определить число элементов какого-нибудь класса, которое не дано прямо. Относящиеся сюда задачи можно охарактеризовать следующим образом.

1. Даны логические условия, связывающие сочетания определенных классов, выраженные логическими уравнениями.

2. Даны количества элементов определенных классов, связанных этими условиями.

Требуется определить число элементов некоторых указанных задачей классов, которые неизвестны.

Число элементов какого-нибудь класса X или x обозначим так, что символ его выражения возьмем в скобки: (X) или (x). Например, число элементов класса AbC обозначим через (AbC). Предполагается, что эти числа конечны.

От уравнений вида $A=B$ можно перейти к уравнениям вида $(A)=(B)$. Но так как знак /. является знаком для связки «или», которая не исключает возможность того, что классы A и B имеют общие элементы, то нельзя от A /. B перейти к арифметической сумме $(A)+(B)$. Это возможно было бы в том случае, если бы

знак $\underset{\cdot}{/}$ обозначал «либо..., либо...», т. е. если бы $AB=0$. Однако обойти это затруднение поможет нам правило исключенного третьего. Если мы имеем логическое уравнение (условие) $C=A^{\cdot}\underset{\cdot}{/}B$, то мы не можем перейти от него прямо к уравнению $(C)=(A)+(B)$, поскольку A и B могут иметь общие элементы. Например, пусть C — это студенты, среди которых A — первокурсники, B — заочники. Тогда ясно, что могут существовать первокурсники, которые одновременно являются заочниками, а также первокурсники, которые не являются заочниками, и заочники, которые не являются первокурсниками. Поэтому ошибочно считать, что $(C)=(A)+(B)$, поскольку нельзя считать первокурсников, являющихся одновременно заочниками, дважды.

Логическое уравнение $C=A^{\cdot}\underset{\cdot}{/}B$ можно преобразовать так. По правилу исключенного третьего имеем:

$$A=AB^{\cdot}\underset{\cdot}{/}Ab \text{ и } B=BA^{\cdot}\underset{\cdot}{/}Ba.$$

Если подставим A и B в наше уравнение, то получим

$$C=AB^{\cdot}\underset{\cdot}{/}Ab^{\cdot}\underset{\cdot}{/}BA^{\cdot}\underset{\cdot}{/}Ba,$$

или же, использовав правила перестановки и поглощения,

$$C=AB^{\cdot}\underset{\cdot}{/}Ab^{\cdot}\underset{\cdot}{/}aB,$$

откуда

$$(C)=(AB)+(Ab)+(aB).$$

Приведем простой пример. Статистическое исследование показало, что среди 100 случаев C имеется 45 случаев A и 53 случая B, т. е. среди 45 случаев из 100 признак A встречается вместе с признаком C и аналогично в 53 случаях из 100 признак B встречается совместно с признаком C. Предположим, нам известно, что всегда, когда встречается A, неизбежно встречается и B. Требуется определить: а) количество случаев C, когда B встречается без A; б) количество случаев C, когда не встречается ни A, ни B.

Данные следующие: (1) $(A)=45$; (2) $(B)=53$; (3) $(C)=100$.

Логическое условие: (4) $A=AB$.

Поэтому (4′) $(A)=(AB)$.

И далее: (5) $(Ab)=0$, где знак 0 обозначает не пустой класс, а просто нуль. Уравнение (5) легко вывести. Согласно правилу исключенного третьего, $A=AB^{\cdot}/.Ab$, но, так как, согласно (4), $A=AB$, то в самом деле $Ab=0$, а следовательно, и $(Ab)=0$.

Чтобы получить ответ на вопрос а), разложим B по A:

$B=AB^{\cdot}/.aB$, следовательно: $(B)=(AB)+(aB)$, и, согласно (4′), $(B)=(A)+(aB)$.

Подставляя из (2) и (3), получаем: $53=45+(aB)$, следовательно, $(aB)=53-45=8$.

Ответ на вопрос б) получим, если разложим C по A и B так: $C=CAB^{\cdot}/.CAb^{\cdot}/.CaB^{\cdot}/.Cab$, следовательно, $(C)=(CAB)+(CAb)+(CaB)+(Cab)$.

Но, согласно (5), $(Ab)=0$, следовательно, и $(CAb)=$ $=0$, а потому $(C)=(CAB)+(CaB)+(Cab)$, или же после подстановки: $100=45+8+(Cab)$, откуда $(Cab)=$ $=47$.

Арифметические применения логики классов нетрудны; они очень полезны при статистических и других исследованиях. Важно лишь, чтобы число арифметических условий было достаточным для полного решения задачи. Однако интересны и те арифметические приложения, которые позволяют сделать некоторые оценки на основании данных, недостаточных для определения числа элементов всех (непустых) классов, возникших из сочетаний данных выражений и их отрицаний. Покажем это на простом примере.

Пусть даны выражения A, B, C, обозначающие соответствующие классы. Мы хотим знать, какова численность класса ABc, если известна численность классов A и AbC, причем дано логическое условие $C=bC$.

Очевидно, что

$$A=ABC^{\cdot}/.ABc^{\cdot}/.AbC^{\cdot}/.Abc,$$

но, принимая во внимание $C=bC$, первое сочетание исключается, и мы получаем:

$$(A)=(ABc)+(AbC)+(Abc),$$

следовательно, $(ABc)=(A)-(Abc)-(AbC)$.

Если бы $(AbC)=0$, то было бы: $(ABc)=(A)-(Abc)$.

Разность $(A)-(Abc)$ определяет, следовательно, максимальное возможное число элементов класса ABc. Если $(AbC)\neq 0$, тогда $(ABc)<(A)-(Abc)$. Этой оценкой мы получаем хотя и неполную, но иногда очень важную информацию о числе элементов класса ABc. Заметим, что если бы, например, статистическое обследование показало, что $(AbC)=0$, то мы к условию $C=bC$ получили бы дополнительное логическое условие. Так как $(AbC)=0$, то и $AbC=0$. Но всегда имеет место: $AbC \cdot\!/\!. Abc=Ab$, а поэтому $Abc=Ab$. Таким образом, можно и наоборот: из числовых условий выводить логические условия, связывающие данные выражения, и прийти к знанию определенных необходимых связей изучаемого вопроса.

45. Депутаты и военные

Обозначим: $Д$ — депутат Совета, $В$ — военный. Тогда

(1) $Д=ДВ \cdot\!/\!. Дв$, а также: (2) $В=ДВ \cdot\!/\!. дВ$.

С учетом логических уравнений получаем следующие арифметические уравнения:

(1′) $(Д)=(ДВ)+(Дв)$, (2′) $(В)=(ДВ)+(дВ)$.

Почленное вычитание (2′) из (1′) дает:

(3) $(Д)-(В)=(Дв)-(дВ)$,

откуда

$$(Д)-(Дв)=(В)-(вД),$$

что и требовалось доказать.

46. Международная конференция

Если обозначим участников конференции, говорящих по-английски,—A, по-французски—B, по-русски—C, тогда из условий задачи следует, что из всех возможных сочетаний: $ABC \cdot\!/\!. ABc \cdot\!/\!. AbC \cdot\!/\!. Abc \cdot\!/\!. aBC \cdot\!/\!. aBc \cdot\!/\!. abC \cdot\!/\!. abc$ некоторые сочетания заведомо будут исключены. Далее имеем числовые отношения:

(1) $(AbC)+(Abc)=(a)$;

(2) $(aBC)+(aBc)=(b)$;

(3) $(AbC)+(aBC)+(abC)=(c)$;

(4) $(Abc) + (aBc) + (abC) = (d)$;

(5) $(AbC) + (Abc) + (aBC) + (aBc) + (abC) = (e)$.

Почленно складывая уравнения (1), (2) и (3), получим:

(6) $$2(AbC) + 2(aBC) + (Abc) + (aBc) + (abC) = (a) + (b) + (c).$$

Почленно вычитая из этого уравнения уравнение (4), имеем:

$$2(AbC) + 2(abC) = (a) + (b) + (c) - (d),$$

следовательно,

(7) $$(AbC) + (abC) = {}^1/_2\,[(a) + (b) + (c) - (d)].$$

Если мы правую часть (7) подставим в левую часть (3), то получим:

$${}^1/_2\,[(a) + (b) + (c) - (d)] + (abC) = (c),$$

а следовательно,

(8) $$(abC) = {}^1/_2\,[(c) + (d) - (a) - (b)].$$

Но это значит, согласно условию задачи $(a) + (b) = (c) + (d)$, что $(abC) = 0$. Используя этот результат, равно как и уравнение (7), получаем, подставляя в (5):

$${}^1/_2\,[(a) + (b) + (c) + (d)] + (Abc) + (aBc) = (e),$$

и окончательно

(9) $$(Abc) + (abc) = {}^1/_2\,[2(e) + (d) - (b) - (c)].$$

Ответы на поставленные в задаче вопросы даны уравнениями (8) и (9). Почленным сложением уравнений (1) и (2) и использовав уравнение (7), получим:

$$(Abc) + (aBc) = {}^1/_2\,[(a) + (b) + (d) - (c)].$$

Этот результат не противоречит уравнению (9), так как из наших результатов следует, что $(a) + (b) = (e)$.

47. Исследование операций по обслуживанию населения

Обозначения: *А* — класс лиц, пользовавшихся услугами первой прачечной; *Б* — класс лиц, пользовавшихся услугами второй прачечной.

Логические уравнения: *А=АБ'/,Аб*; *Б=БА'/,Ба*.

Арифметические уравнения: (*А*) = (*АБ*) + (*Аб*), (*Б*) = = (*БА*) + (*Ба*).

Дано: (*А*) = 562, (*Б*) = 474, (*аБ*) = 435, таким образом

(1) 562 = (*АБ*) + (*Аб*),

(2) 474 = (*АБ*) + 435.

Почленно вычитая (2) из (1), получаем: 88 = (*Аб*) — 435, откуда (*Аб*) = 523.

Услугами только первой прачечной пользовалось 523 человека.

48. Переводчики

Обозначим соответствующие классы:
Переводчики указанных языков — *С*.
Переводчики, владеющие французским, — *Ф*.
Переводчики, владеющие испанским, — *И*.
Логические условия:

СФ = СФИ ·/· СФи,

С = СФИ ·/· СФи ·/· СфИ.

Числовые условия: (*С*) = 20, (*СФ*) = 8, (*СФи*) + (*СфИ*) = = 15.

Однако

(*С*) = (*СФИ*) + (*СФи*) + (*СфИ*),

(*СФ*) = (*СФИ*) + (*СФи*).

Таким образом,

(1) (*СФИ*) + (*СФи*) + (*СфИ*) = 20;

(2) (*СФи*) + (*СфИ*) = 15;

(3) (*СФИ*) + (*СФи*) = 8.

Почленно вычитая (2) из (1), получаем (*СФИ*) = 5, и, почленно вычитая (3) из (1), получаем (*СфИ*) = 12. Следовательно, (*СФ*) = (*СФИ*) + (*СФи*) = 5 + 12 = 17. Итак, переводчиков с испанского было 17.

49. Продовольственные запасы

Обозначения: *П* — продовольственные запасы; *К* — консервы; *И* — испорченные консервы. Логическое уравнение: *П = ПКИ ·/· ПКи ·/· ПкИ ·/· Пки.*

Арифметические условия: $(ПК) = {}^2/_3(П)$, $(ПИ) = (П)$.

С учетом логического уравнения получаем следующее арифметическое уравнение:

$$(П) = (ПКИ) + (ПКи) + (ПкИ) + (Пки).$$

Имеем также:

$$(П) = \underline{(ПКИ)} + \underline{(ПКи)} + \underline{\underline{(ПкИ)}} + (Пки) + \underline{\underline{(ПКИ)}} - (ПКИ).$$

Объединяя сочетания, подчеркнутые один раз, получаем $(ПК)$, подчеркнутые два раза — $(ПИ)$. Следовательно,

$$(П) = (ПК) + (ПИ) + (Пки) - (ПКИ),$$

а после подстановки:

$$(П) = {}^2/_3(П) + {}^2/_3(П) + (Пки) - (ПКИ),$$

откуда,

$$(ПКИ) = {}^1/_3(П) + (Пки).$$

$(ПКИ)$ будет иметь минимальное значение, когда $(Пки) = 0$. Тогда min $(ПКИ) = {}^1/_3(П)$.

При этом предположении можно писать

$$(ПКИ) + (ПКи) = (ПК) = {}^2/_3(П),$$
$${}^1/_3(П) + (ПКи) = {}^2/_3(П),$$

и, следовательно, max $(ПКи) = {}^1/_3(П)$.

Таким образом, испорченные консервы составляют по меньшей мере половину всех консервов; их точно половина, если не остается неиспорченных продуктов, которые не являются консервами.

50. Число неизвестных предметов

Так как, согласно задаче, существуют предметы, обладающие одновременно свойствами X и Y, то их конечное число обозначим через a, между тем как число предметов (опять-таки конечное), лишенных свойств Y и Z, не должно быть меньше числа предметов, обладающих свойством X, иначе говоря, должно быть на некоторое

b больше, где $b \geqslant 0$. Таким образом, мы имеем числовые отношения:

$$(1)\ (XY) = a,\ (2)\ (YZ) = (X) + b.$$

Из (1) следует:

$$(1')\ (XYZ) + (XYz) = a,$$

из (2), разлагая обе части, получаем:

$$(2')\ (Xyz) + (xyz) = (XYZ) + (XYz) + (XyZ) + (Xyz) + b,$$

следовательно, подставляя из (1') в правую часть (2'), имеем:

$$(Xyz) + (xyz) = a + (XyZ) + (Xyz) + b \text{ и}$$
$$(xyz) = a + (XyZ) + b.$$

Предметы, лишенные свойств X и Z, следовательно, существуют, и их количество по меньшей мере равно a. Оно больше a, если предметов, лишенных свойств Y и Z, больше, чем предметов со свойством X, или такое же, если класс предметов, обладающих свойствами X и Z, но не обладающих свойством Y, не пуст.

ЗНАЧЕНИЕ СИМВОЛИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Есть хорошая латинская пословица, которая гласит: «ошибаться свойственно всякому человеку, но настаивать на ошибке свойственно только глупцу».

В. И. Ленин

Большая часть многовековой истории логики протекала в условиях сравнительно низкого уровня техники, естествознания и математики постоянных величин. Эти области человеческой деятельности, нуждающиеся, вообще говоря, в высокоразвитых приемах мышления, не слишком допекали логику своими требованиями. Их потребности долго удовлетворяла созданная древними греками логика высказываний и логика одноместных предикатов, сложившаяся главным образом под влиянием потребностей юридических и политических споров.

Благодаря этому логика, как теория законов мышления, разрабатывалась преимущественно лишь с философской, гносеологической стороны, оставаясь, как это отмечал Энгельс, «начиная с Аристотеля и до наших дней, ареной ожесточенных споров».

Методы логики, как техники научного мышления, развивались довольно медленно. Традиционная логика снискала сомнительную известность своей крайней бессодержательностью, скукой, неспособностью служить практическим потребностям конкретных наук. Еще Ари-

стон Хиосский (около 270 г. до н. э.), ученик Зенона-стоика, говорил, что углубляющегося в диалектику[1] можно сравнить с человеком, любящим кушать раков: из-за кусочка мяса он тратит уйму времени над кучей шелухи. Шотландский философ Уильям Гамильтон добавил к этой оценке, что «человек, занимающийся у нас изучением логики, тратит свое время, не попробовав ни кусочка мяса» [1]. Этот безжалостный приговор совпал с известным высказыванием Гегеля в «Науке логики» о пустоте форм традиционной логики, невыносимой пустоте, делающей их достойными презрения и насмешки. Гегель заявлял, что «внешние» формы мышления, оторванные от содержания и противопоставляемые ему, не способны охватить истину, но зато — в определенных условиях — могут стать орудиями ошибки и софистики. Это высказывание сочувственно отметил Ленин в «Философских тетрадях».

Заметен прогресс формализации логики в Средние века[2]. Что касается сатирического отношения к ней, которое отражено в классических произведениях мировой художественной литературы — «Гаргантюа и Пантагрюэль» Рабле, «Мещанин во дворянстве» Мольера, «Дон Кихот» Сервантеса, «Путешествие Гулливера» Свифта, «Свадьба Фигаро» Бомарше и в ряде других, созданных в XVI—XVIII вв., то это отношение чаще всего — плод недоразумения.

Греки создали в «Началах» Эвклида блестящий образец построения логической аксиоматизированной системы. У них имелись также зачатки индуктивной логики, впервые в истории встречающиеся в медицинских сочинениях Гиппократа, а затем, в более развитом виде, у эпикурейцев и Филодема. В целом развитие логики протека-

---

[1] Стоики, первые употребившие термин «логика», понимали под ним науку о «логосе» в обоих тогдашних значениях этого слова, т. е. о разуме (мысли) и о слове. «Логика» делилась ими на «диалектику» — логику в том смысле, который это слово приобрело лишь в XVI в. и который оно сохраняет и поныне, и на грамматику.

[2] Велики заслуги таких ученых, как Раймунд Луллий, Дунс Скотт, Уильям Оккам, работы которых оказали положительное влияние на новейшее развитие логики. Значительные результаты получены также в логических исследованиях Аль Фараби, Абу Али ибн Сины (Авиценны), Аверроэса и других ученых.

ло без существенных контактов с развитием естественных наук и математики, вплоть до второй половины XV в.

Великие естествоиспытатели эпохи Возрождения относились к традиционной логике скептически. Леонардо да Винчи называл ее учение о силлогизме «чудачеством», Галилей в «Диалоге о двух системах мира» высмеивал догматическое преклонение перед авторитетом логики Аристотеля. Математики и естественники эпохи Возрождения были вынуждены сами вырабатывать правила логических приемов для своих научных исследований, не находя их ни в «логическом квадрате», ни в мнемотехнических стихах для фигур ассерторических и модальных силлогизмов.

Комментатор Эвклида математик Клавдий (1501—1576) содержательно сформулировал теорему двузначного исчисления высказываний

$$\vdash [(\neg p \supset p) \supset p], \qquad (1)$$

получившую название consequentia mirabibis («удивительное следование») и вытекающую из правила, которое (хотя и не формулируя его явно) применял еще Эвклид (книга IX, теорема 12 «Начал»).

Эта теорема Клавдия вместе с теоремой

$$\vdash [(p \supset \neg p) \supset \neg p]^{1} \qquad (2)$$

принадлежит к тем положениям двузначного исчисления высказываний, которые не имеют места в трехзначном исчислении высказываний.

Р. Декарт писал в «Рассуждении о методе», что выделить из традиционной логики истинные и полезные правила, поскольку они в ней перемешаны с вредными

---

[1] Предложения (1) и (2) читаются: (1) «утверждаем, что если из того, что предложение p ложно, следует, что p истинно, то отсюда следует, что p истинно»; (2) «утверждаем, что если из того, что предложение p истинно, следует, что p ложно, то отсюда следует, что p ложно». Предложение (1) и вытекает из правила рассуждения: $(\neg p \supset p) \vdash p$; предложение (2) из правила $(p \supset 0) \vdash p$, где 0 означает ложность. В трехзначном исчислении высказываний оба предложения заменяются более «слабыми». Вместо (1) мы имеем $\vdash [(\neg p \supset p) \supset p^{*}]$, а вместо (2) будет теперь $\vdash [(p \supset \neg p) \supset \neg p^{+})]$. Здесь p^{*} означает «p по меньшей мере возможно», а p^{+} читается как «p необходимо».

или излишними правилами, столь же трудно, как получить статую Дианы или Минервы из мраморной глыбы, вдобавок даже неотесанной. Сам же он, создав аналитическую геометрию, стал широко пользоваться понятием изоморфизма, хотя и не сформулировал его явно. Это логическое понятие играет исключительно большую роль в современной науке.

Знаменитый математик, физик и философ Б. Паскаль изучал методы доказательства в дедуктивных науках. Особенно важно было его учение об аксиоматических определениях.

Паскаль сформулировал восемь правил, из которых первое и восьмое представляют здесь особый интерес: 1) не пытаться давать определение ни одной вещи, настолько известной по ней самой, что не имеется никаких более ясных терминов, чтобы объяснить ее; 8) всегда подставлять определяющее на место определяемого для того, чтобы не ошибиться в терминах, которые были ограничены (restreints) определением. Как заметил выдающийся современный математик Адамар [2], между этими двумя правилами, которые у Паскаля отделяются всего лишь несколькими строчками, существует противоречие; странным образом «пораженный психической слепотой» Паскаль не осознал его. Ведь нельзя, в самом деле подставлять определяющее на место определяемого там, где самого определения быть не может! Вместе с тем очевидно, что как бы важно ни было правило (8), нельзя обойтись и без правила (1), ибо цепь определений понятий не может быть ни бесконечной, ни замкнутой, а должна начинаться какими-то далее неопределимыми первичными понятиями. Все эти логические проблемы, первостепенные для систематического построения любой научной дисциплины, были подняты Паскалем.

В подготовке нового развития логики особенно велики заслуги Лейбница. Использовав комбинаторику, он установил полный список модусов ассерторических силлогизмов; он дал также строгое определение тождества имен предметов: «eadem sunt quorum unum potest substituti alteri salva veritate» («тождественны те (и только те) имена, из которых одно может заменить другое с сохранением истинности») [3]. Выходя за рамки традиционной логики, Лейбниц требовал, чтобы логика сделала процесс умозаключения независимым от размышления о

содержательном значении предложений, входящих в этот процесс, подобно тому, как процесс математического вычисления не зависит от размышлений о содержательном значении знаков, которые применяются в нем. В этом именно смысле Лейбниц хотел превратить правила логического вывода в вычислительные правила. И хотя его рукописи, содержащие наброски исчисления предикатов, оставались неизвестными (эти рукописи были опубликованы Л. Кутюра лишь в 1901 г., между тем как само исчисление под названием «логической алгебры» было самостоятельно создано Булем (1847), эти идеи Лейбница оказали значительное влияние на его учеников и последователей, с которыми он поддерживал обширную переписку.

Лейбниц подчеркивал, что долженствующее быть созданным исчисление ведения доказательства («calculus ratiocinatur») будет всеобщим качественным исчислением («scientia generalis de qualitate»). В письме к математику Чирнхаузену он писал (1678): «Это исчисление есть не что иное, как действие при помощи знаков, имеющее место вовсе не только в количествах, но и во всевозможных других умозаключениях» [4]. Лейбниц мечтал о создании искусственного универсального языка со своим понятийным письмом — «characteristica universalis», позволяющим алгоритмически решить любую задачу любой науки. Как это теперь строго доказано (К. Гедель, 1931), подобную единую всеобщую формальную систему построить невозможно. Однако огромное значение, которое приобрело ныне развитие символических систем в отдельных науках, свидетельствует о гениальности идей Лейбница. К подобной системе знаков он предъявлял следующие требования: 1) взаимно однозначные отношения между предметами мышления и символами; 2) если предмет мышления можно разложить на составные части, то и его «образ» должен быть разложимым; 3) если два предмета мышления находятся друг к другу в отношении основания и следствия, то их «образы» должны находиться в таком же отношении.

Следовательно, Лейбниц вовсе не мыслил себе символы «бессодержательными». Он требовал лишь отвлечься во время действия над ними от их содержательного смысла для того, чтобы незаметно не вносить в рассуждения необоснованных положений. Он желал, чтобы ло-

гика стала «ars calculandi» — «искусством исчисления», чтобы она превратилась в «jeu de charactères» — в «игру со знаками» по особым установленным правилам. Он требовал от новой логики, чтобы она стала «нитью Ариадны в мышлении» — методом точного мышления.

Лейбниц считал, что «новый логический метод» будет эффективен, поскольку он вскроет всякий паралогизм просто как ошибку в вычислении. «Между двумя философами противоречивые направления не смогут больше стать предметом спора, так же как не может быть словопрений между двумя вычислителями... Ведь для решения спора достаточно будет взять в руки писчий тростник, сесть за абак и сказать — давайте, будем вычислять!» [4]. И хотя, как мы теперь знаем, это были полностью неосуществимые мечты, они были полны оптимизма, уверенности в прогрессе науки. Лейбниц как будто порицал те головокружительные успехи, которые идея формализованных систем завоевала в современной логике и ее практических приложениях.

Большой заслугой Лейбница является его интерпретация аристотелевского учения о силлогизмах с помощью арифметики натуральных чисел, а также идея создания логики вероятного знания наряду с логикой знания достоверного.

Лейбниц рассматривал логическое определение по типу выражения математических величин при помощи алгебраических формул. Считая, что основные положения логики, так же как и математики, являются необходимыми и всеобщими и что они не могут противоречить друг другу, он намеревался создать «каталог первичных понятий, из которых остальные составлялись бы». При этом Лейбниц рассматривал понятия, как правило, с точки зрения их содержания. Разложение сложных понятий представлялось ему по аналогии с разложением целого числа на его простые множители, т. е. осуществимым лишь единственным способом. Впервые в истории науки Лейбниц сформулировал проблему совместимости системы предложений. Это был вопрос о том, не могут ли данные посылки, с первого взгляда кажущиеся непротиворечивыми, все же содержать скрытые противоречия, которые, возможно, проявятся в дальнейшем — в процессе выведения из этих посылок заключений. В особенности важен был вопрос о том, как решить подобные

сомнения. Эти вопросы сыграли, как известно, определяющую роль при решении двухтысячелетней проблемы об аксиоме параллельных линий.

* * *

Мы здесь не собираемся даже вкратце излагать всю предысторию и историю символической логики. То немногое, что сказано выше, кажется нам уже достаточно убедительным и свидетельствует, что все действенное, плодотворное, дающее возможность практического применения логики и как орудия математического исследования, и как метода расчета и конструирования во многих технических науках, появилось в результате работы не специалистов-философов. Все жизненное в логике достигнуто благодаря отходу логики от ее традиционной застывшей формы.

Приведенные факты — не просто сумма примеров, но и проявление определенной закономерности, определенной исторической линии развития. Если бы мы продолжали ее изучение, то заметили бы, что Ньютон создал в «Математических началах натуральной философии» — вторую после Эвклида — попытку содержательной аксиоматизации системы науки (на сей раз — механики) и разработал в то же время индуктивные правила экспериментального исследования. Мы увидели бы, что предтеча неэвклидовой геометрии Саккери усердно занимался разработкой учений о логических доказательствах и т. д. И нам бросилось бы в глаза, что, особенно начиная с XIX в., когда начала зарождаться электротехника, когда физика стала изучать явления, чувственно-наглядно невоспринимаемые, необыкновенно усилилось взаимодействие математики и логики.

В 1822 г. Понселе впервые высказал в проективной геометрии плоскости «принцип двойственности», согласно которому все понятия проективной геометрии разбиваются на два класса взаимно соответствующих «двойственных понятий», как, например: т о ч к а — п р я м а я; точке л е ж а т ь на прямой — прямой п р о х о д и т ь через точку и др. Если в какой-либо истинной теореме этой геометрии заменить все понятия на двойственные им, то опять получится истинная теорема, например, из высказывания «любые две точки лежат на одной прямой»

получим «любые две прямые проходят через одну точку».

Вскоре оказалось, что принцип двойственности не ограничивается лишь проективной геометрией, а имеет место и в других аксиоматизированных системах, прежде всего в «булевой алгебре», а также в теории множеств и в топологии. Выяснилось, что одна и та же геометрическая теорема может иметь несколько наглядных интерпретаций, одинаково истинных, но совершенно отличных друг от друга. Тем самым как перед математикой, так и перед логикой была поставлена проблема определения, которое стали теперь рассматривать как аббревиатуру для конструктивного мыслительного процесса.

В 1826 г. Лобачевский предложил свой вариант неэвклидовой геометрии, которая еще убедительнее показала, что различные чувственно-наглядные образования могут выступать как интерпретации одной и той же логико-геометрической формы. Прежнее, шедшее еще от последователей Аристотеля[1] понимание аксиоматизированной системы как абсолютной, опирающейся на «очевидные» исходные положения и обеспечивающей незыблемость всех вытекающих из них выводов, должно было уступить место такому ее пониманию, согласно которому исходные положения представляют лишь гипотезы, которые должны проверяться их сличением с материальной действительностью. Создание неэвклидовых геометрий привело вместе с тем к методу доказательства непротиворечивости аксиоматизированной системы путем ее интерпретации в другой аксиоматизированной системе. Этот метод, метод арифметизации, впрочем, впервые, как мы уже отметили, примененный Лейбницем к учению о силлогизмах, оказался в дальнейшем фундаментальным в трактовке оснований математики.

Длительная борьба вокруг открытия дифференциального и интегрального исчисления, борьба за истолкование его основных понятий послужила толчком для изучения проблемы выражения мысли при помощи символов, а также для исследования формальных свойств математических действий. Одновременно с теорией арифметики и алгебры создавались и зачатки символического метода в логике. Буль писал: «Тот, кто

[1] Хотя, по-видимому, и не от самого Аристотеля.

знаком с современным состоянием символической алгебры, знает, что справедливость процесса анализа не зависит от интерпретации встречающихся символов, а только лишь от законов их сочетания. Всякого рода интерпретация, не нарушающая справедливости предположенных отношений, одинаково допустима, а поэтому один и тот же прием может дать при одной интерпретации решение проблемы теории чисел, при другой интерпретации — решение проблемы геометрии, при третьей — решение проблемы динамики или оптики, и т. д.» [5]. Сам Буль пытался выявить изоморфизм его «логической алгебры» и теории вероятностей.

Большое значение для развития новой логики имело появление механических или квазимеханических моделей в физике. Оно сделало необходимым выяснение применимости таких понятий (как, например, понятие равенства), которые подразумевали ненаблюдаемые величины. Ведь Галилей и Ньютон, считавшие, что масса — это просто количество материи, не задумывались над смыслом положения «две массы, порознь равные третьей, равны между собой». Но Э. Мах (1868) требовал, чтобы равенство масс, а Дж. Максвелл (1871) — чтобы равенство температур не постулировалось априорно, а определялось измерением. Г. Гельмгольц (1887) довел эту идею до логического завершения, показав, что понятие «равенства» является частным случаем определения через абстракцию и что оно обусловлено симметрией и транзитивностью отношений между рассматриваемыми вещами. Эта же идея вновь появилась при обосновании понятия количественного числа у Г. Кантора. Свое завершение она нашла у создателя первой формализованной системы логики Г. Фреге.

Трудности, возникшие в математике в связи с понятием бесконечности, особенно проявившие себя в парадоксах расходящихся рядов и в ложных доказательствах теории экстремумов, вызвали к жизни занятия логической стороной этой важнейшей проблемы. Вновь начатые Б. Больцано, О. Коши, Дюбуа-Реймоном и Г. Кантором, эти исследования логических и математических парадоксов, ведшиеся еще в древности, а затем Галилеем, были продолжены на новом уровне.

Наконец, большое влияние на развитие логики оказало критическое исследование оснований геометрии,

которое под влиянием логики же особенно усилилось с 60—70-х годов XIX в. Геометры ставили задачу придать постулатам своей науки чисто логическую форму, т. е. форму отношений настолько общих, что они имеют место между крайне абстрактными понятиями, и очистить их от неявно содержащихся в них чувственно-наглядных элементов. В связи со всеми этими проблемами обоснования математики и начал широко разрабатываться символический метод в логике, сначала Дж. Пеано и Э. Шредером, затем Б. Расселом, Д. Гильбертом и др.

Итак, новая система логики, получившая, на наш взгляд, не вполне точное название «математической логики»[1], характерная своим символическим методом, была вызвана к жизни необходимостью критического пересмотра основ геометрии и арифметики, а потом механики и физики, что, как известно, привело к блестящим достижениям во всех этих науках.

Что же касается самой логики, то применение символического метода дало замечательные результаты. Правда, преувеличенные надежды, связывавшиеся первоначально с ним, надежды на полную формализацию и опирающуюся на нее алгоритмизацию мыслительных процессов, равно как и на устранение из математики парадоксов, не оправдались полностью. Более того, именно при помощи новой системы логики было неопровержимо доказано и то, что полная формализация невозможна, что не все задачи могут быть переданы машине. Стало ясно, что невозможно раз и навсегда устранить парадоксы в обоснованиях математики, что они могут быть лишь смещены: исчезнув в одном месте, они непременно появляются в другом. Беспочвенными оказались также расчеты на возможность сведе́ния математики к логике или логики — к математике.

И все-таки достигнутое при помощи новой системы логики превзошло самые смелые ожидания. Логика, до недавнего времени казавшаяся лишь отголоском отошедшего в прошлое буквоедства, вошла в качестве

---

[1] Это название, пожалуй, оправдано постольку, поскольку имеется в виду лишь первый этап развития символической логики, связанной с именами Дж. Буля, А. де Моргана, У. С. Джевонса и других ученых.

необходимого элемента в методологию точного естествознания. С ее помощью начали рассчитывать контактно-релейные схемы, а затем и использовать их для моделирования мыслительных процессов. Автоматизация и телемеханизация производства, конструирование быстродействующих электронных вычислительных машин и оперирование на них, применение их для автоматизации различных видов умственного труда (переводческого, статистики и учета, поиска научной информации и др.) — все это стало возможным лишь благодаря символической логике. Успехи бурно развивающейся кибернетики открывают перед символической логикой еще большие возможности: применение к формализации выводов в квантовой физике, к формализации таксономии и теории эволюции, к исследованию высшей нервной деятельности, к проблемам управления обществом — трудно предугадать ее захватывающие перспективы. Без этих успехов не было бы космонавтики, человечество не смогло бы вступить в космическую эру.

Эти достижения современной логики, к которым она не могла прийти без помощи символического метода, убедительно говорят в его пользу. Но, как это ни странно, убедительно далеко не для всех.

Вряд ли найдутся люди, отвергающие применение языка или арифметики как лженаучное, идеалистическое на том основании, что, скажем, слово «человек» ни своим звучанием, ни своим начертанием не похоже на действительного человека, а, к примеру, числительное 5 не похоже на то количественное отношение, которое оно выражает. Между тем философов, вдобавок считающих себя марксистами и упорно отвергающих символическую логику, поскольку она — о ужас! — применяет символы вроде &, V, ⊃, ¬, непохожие на те логические связки, которые они означают, можно нередко встретить, чаще всего потому, что они о символической логике имеют лишь весьма смутное представление. Зная, что многие современные идеалистические течения, в особенности те, которые модны среди естественников, усердно используют новую логику в борьбе против материализма и диалектики, эти товарищи настаивают на том, что символический метод превратил логику в нечто иррациональное, мистическое. Они утверждают, что он якобы

родствен идеалистическому направлению — символизму. Поверив гносеологическим высказываниям буржуазных теоретиков, стоящих на идеалистических позициях, они отвергают самый этот метод без выяснения его положительного содержания. Понятно, что это не позволяет ни ясно понять критикуемые идеалистические направления, ни разобраться в том влиянии, которое эти направления оказали на многих выдающихся естествоиспытателей в капиталистических странах.

* * *

Современная логика, как метод научного исследования, исторически развилась на базе традиционной логики путем внедрения в нее символического метода. Как известно, традиционная логика при всей ее ограниченности является необходимым моментом всякого познания, в том числе и познания научного, представляя, как писал Энгельс, «прежде всего метод для отыскивания новых результатов, для перехода от известного к неизвестному».

Но не следует ли отвергнуть символическую логику именно из-за того, что она пользуется символическим методом? Припомним, чему учит диалектический материализм о символах и философском символизме. Как известно, Ленин критиковал в «Материализме и эмпириокритицизме» гельмгольцевскую «теорию символов», которой равносильна и плехановская «теория иероглифов», как отступление от материализма к идеализму. Но речь шла не о недопустимости применения символов вообще, а об ошибочности считать ощущения и представления символами, т. е. об ошибке гносеологической. В конспекте к «Науке логики» Гегеля Ленин сформулировал вновь суть различий в подходе к символам и к философскому символизму: «Отметить лишь... замечания о *символах*, что против них вообще ничего иметь нельзя. Но *«против всякой символики»* надо сказать, что она иногда является «удобным средством обойтись без того, чтобы охватить, указать, оправдать *определения понятий*» (Begriffsbestimmungen). А именно в этом дело философии» [1]. Ленин отвергал не вообще применение символов, а такие попытки их применения, когда философские понятия, высказы-

---

[1] В. И. Ленин. Сочинения, т. 38, стр. 107.

вающие сущность данного явления, подменяются знаками, ничего не определяющими, а только затемняющими сущность данного явления. В самом деле, произнося «вода» или «aqua», написав эти слова или же H_2O, мы употребляем символы, т. е. знаки, которые не имеют сходства с действительной водой и ее восприятием, представлением и понятием о ней. То же самое имеет место, когда мы говорим «пять» или записываем 5, или записываем норму прибыли уравнением:

$$p = \frac{m}{c + v},$$

или когда светофор зеленым светом показывает, что путь открыт. Совершенно другое место занимают символы у тех философов-идеалистов, которые превращают философию в игру символами. Например, Шеллинг, «объяснял» символами все явления: в боге дана непосредственная степень абсолютного — неограниченное бытие — 1; в природе — первая степень абсолютного — материя — A; затем идет вторая степень — свет — A^2; наконец, третья степень — организм — A^3, причем «степени — это количественные различия субъективности и объективности».

В основе ошибочного отношения к символам (как в случае, когда наши представления считают лишь условными знаками, позади которых нет объективной реальности, так и в случае, когда существенные философские определения понятий пытаются подменить игрой в символы) лежит порочная посылка о разрыве между мыслью и действительностью. Если же символы используются не в гносеологическом смысле, а как подсобные средства познания, введение которых в ту или другую научную дисциплину и действия над которыми подчинены содержательному контролю данной области знания, то против их применения, в том числе и в логике, возражений быть не должно. Следует лишь иметь в виду, что успех применения символов зависит от того, насколько понятия данной области могут быть — при существующем уровне знаний — формализованы.

Этот вопрос напоминает о применимости математики к другим наукам. Истолковывая материалистически известное изречение Гегеля, на которое обратил внимание Ленин, можно сказать, что чем богаче отношениями, а

тем самым и определеннее становятся мысли, «тем, с одной стороны, более запутанным, а с другой, более произвольным и лишенным смысла становится их изображение в таких формах, как числа»[1]. Но не значит ли это, что в самом деле, как заметил в свое время Энгельс, применение математики, будучи абсолютным в механике твердых тел, при переходе к высшим формам движения падает и доходит до нуля в биологии? Нет, ибо применимость математики не только уменьшается с усложнением формы движения. Она и увеличивается с разработанностью самой математики, возрастающей с каждой последующей исторической ступенью, что дает возможность проникновения математического метода во все более широкий круг наук. Это подтверждается современным состоянием математики, нашедшей плодотворные выходы в биологию, психологию и политэкономию. Известно высказывание Маркса в письме к Энгельсу от 31 мая 1873 г.[2] о применимости математического анализа для исследования закона периодических кризисов капиталистической экономики.

При всем этом нужно принять во внимание, что область применимости символов значительно шире области применимости математики. Разумеется, математика, по современным представлениям,— не только наука о количественных отношениях и пространственных формах (а тем более не только наука о числах), но и наука о более общих структурных отношениях действительного мира, отношениях, изоморфных отношениям количественным и пространственным. Тем не менее даже в самом обобщенном понимании математические отношения не охватывают бесконечного богатства отношений, существующих в действительности.

Логика, пользующаяся символическим методом, понятно, еще более абстрактна, чем формальная логика в ее традиционном изложении. Но и это обстоятельство — подъем на более высокую ступень абстракции — свидетельствует не против символического метода, а в его пользу. В самом деле, лишь символический метод позволил логике углубиться в анализ таких тонких понятий, как те, которые связаны с проблемой обоснования мате-

---

[1] В. И. Ленин. Сочинения, т. 38, стр. 105.
[2] К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. XXIV, стр. 414.

матики, с теорией множеств, где достигнуты значительные успехи в решении проблемы континуума, с теорией вероятностей. Лишь он дал возможность современной логике стать инструментом кибернетики, на принципах которой строятся машины, «продолжающие» человеческий мозг. Традиционная логика, несомненно менее абстрактная, оказалась бессильной перед этими задачами.

Подлинная цель символического метода в логике состоит в том, чтобы придать самой логике максимально строгое — аксиоматическое — изложение. Правда, достичь этого путем единой неизменной системы аксиом для всей логики невозможно, однако мы приближаемся к этой цели через развертывающуюся последовательность все более широких аксиоматизированных систем. Перестроенная таким образом логика служит затем выяснению логической структуры других наук, в первую очередь математики, а также непосредственно методам исследования и оперирования в естественных и технических науках.

Создав свои новые более мощные логические средства, современная логика вобрала в себя значительные элементы диалектики. Служа обоснованию современной математики, которая давно вступила в диалектическую область, она не могла не приобрести некоторые диалектические черты. Считая ее все же — поскольку диалектический элемент не входит в нее *в явном* виде[1] — дальнейшим развитием логики традиционной, мы не должны забывать, что она решительно отличается (в сторону несравненно большей гибкости понятий) от традиционной логики.

У нас принято называть новую логику логикой «математической», что обосновывается, с одной стороны, тем, что применяемые в ней символы и способ действия над ними напоминают математические вычисления. С другой стороны, тем, что эта логика лежит в основе теории математического доказательства. Но неправильно делать отсюда вывод, будто «математическая логика» служит только математике и будто она представляет лишь пере-

---

[1] Примером диалектики, входящей в неявной форме в символическую логику, может служить известная теорема К. Геделя о принципиальной неполноте формализованной арифметики.

ложение на язык математических формул традиционной логики.

Неправильно также считать ее чисто математической наукой. Это наука пограничная, расположенная на рубеже математики и философии, ибо, как и всякая логика, она не является независимой от гносеологии. Другое название новой логики — «символическая логика», широко распространенное за рубежом, название, указывающее на характерный для новой логики метод, у нас менее принято.

Нигилистическое отношение к современной логике нельзя считать чем-то безобидным. Подобно тому, как получившее у нас в свое время известное распространение зазнайски-пренебрежительное отношение к иностранной технике, к теории относительности, к квантовой химии, к генетике или к кибернетике — пренебрежительное отношение к современной логике приносило и приносит серьезный ущерб развитию нашей науки. Как справедливо указано в письме группы советских научных и технических работников, опубликованном в печати («Советская Россия», № 76, 1956), у нас, к сожалению, нет ни научного центра, ни журнала по логике. И это при наличии успехов мирового значения, которых добились в этой области такие ученые, как А. Н. Колмогоров, И. И. Жегалкин, А. А. Марков, П. С. Новиков, В. И. Шестаков, А. А. Шанин, С. А. Яновская и другие.

В заключение следует сказать, что современная символическая логика счастливо преодолела отрыв логики от конкретных, в особенности математических и естественных наук, отрыв, освященный многовековой традицией трактовки логики как чисто гуманитарной науки, отрыв, содействовавший ее окостенению и ее истолкованию в идеалистическом духе. Приложение логики к математике, к естествознанию, к технике вынуждает логику совершенствовать свои методы, вновь и вновь подвергать свою структуру критическому пересмотру, обогащаться новыми направлениями и ответвлениями. Возникшие в новое время логика отношений, системы многозначной логики, конструктивные логические исчисления, неассоциативные и другие неаристотелевские логики, семиотические и иные металогические исследования, давшие важные плодотворные результаты, свидетельствуют о том, что от применения символического метода в логике выиграли как логика, так и конкретные науки.

И если мы наблюдаем, что достижения современной логики кружат голову некоторым буржуазным ученым, воображающим, будто область логики — единственная реальность, то в этом повинна не логика, а те особые общественно-идеологические условия, в которых в капиталистических странах протекает развитие науки. Отход части философов прошлого и настоящего, в «третье царство» — в сферу абсолютных логических истин, в мир, стоящий якобы как над материальным бытием, так и над переживаниями психики, вызван, в конечном счете, глубокими классовыми причинами.

Действительность империализма заставляет идеологов господствующих классов метаться в поисках прибежища более надежного, чем обветшалый «классический» идеализм. Одни находят его, возвращаясь к платоновскому миру идей, другие окунаются в туман мистики. Но как бы ни искажали эти философские идеалистические «выводы» современную логику и те науки, к которым она прилагается, из этого отнюдь не следует, будто диалектический материализм должен отбросить ее. Его задача вскрывать — не с наскока, а терпеливо, со знанием дела — эти искажения, непримиримо бороться против них, усваивая вместе с тем все положительное, что дают для познания и переделки мира логические средства символического метода.

Современная символическая логика сохраняет полностью важнейшую характеристическую черту формальной логики — она не рассматривает содержания мыслей, а рассматривает только их форму. Как и традиционная логика, символическая логика расчленяет мышление, как бы анатомизирует его, сводит его к комбинациям простейших элементов. Оставаясь все-таки формальной, она не в состоянии охватить действительность во всей ее полноте. Это связано с двойственным характером развития самой науки. Еще Лобачевский в труде «О началах геометрии» писал, что трудность познания увеличивается как по мере приближения к «начальным» истинам, так и в другом направлении — в направлении развития познания к более сложным положениям.

В современной логике, с ее символическим методом, техника и теория мышления достигли небывало высокой тонкости и точности. Мышление поднялось на вершины абстракции, обеспечив невиданные технические достиже-

ния, которые, в свою очередь, неизменно стимулируют его дальнейший подъем. Сегодня можно с полным основанием считать, что с рождением математики переменных отношений, глубоко математизированной физики (математика служит в ней не только для обобщения результатов эксперимента, но прежде всего для моделирования физических процессов и для поисков новых теорий) и, наконец, символической логики, наступила новая эпоха развития научной мысли.

Однако следует учитывать, что использование современной логики, как важной составляющей части научной культуры нашего времени, характеризуется присущей этой культуре раздвоенностью. Полвека назад, когда империализм находился еще на стадии относительно «мирной» экспансии, кризис естествознания вызывался противоречием между бурным ростом науки, ломающей отжившие понятия, и консервативной общественной идеологией. Теперь же, после того как две мировые войны и ряд победоносных социалистических революций положили конец монопольному положению капиталистической системы, в естествознании и математике, а также и в логике борются два направления — передовое и реакционное. Последнее не только взращивает паразитирующую на достижениях науки и техники идеалистическую философию, но и пытается, извращая ее суть, поставить науку всецело на службу агрессивным эксплуататорским интересам господствующих классов.

Однако все более значительное число ученых всего мира начинает понимать, что использование современной науки и техники таит две полярных возможности: служить либо счастью, либо невиданным бедствиям людей. Какая из них будет реализована, зависит от степени сознательности самих людей и характера их практической и теоретической деятельности.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. W. Hamilton. Review of Edinburgh. 1893.
2. J. Hadamard. La géometrie non-euclidienne et les définitions axiomatiques. La Pensée, N 58, Paris, 1954.
3. Цит. по: L. Couturat. Opuscules et fragments inédits de Leibnitz. Paris, 1903.
4. G. W. Leibnitz. Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie. 1904.
5. G. Boole. The mathematical analysis of Logic. 1847.

ЧТО ЧИТАТЬ ЖЕЛАЮЩИМ УГЛУБИТЬ СВОИ ЗНАНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ[1]

И. Я. Депман. Первое знакомство с математической логикой. Изд-во «Знание», 1965, 56 стр.

А. Грошев. Введение в математическую логику и ее технические приложения. Свердловск, 1964, 50 стр.

Г. О. Ефремов. Математическая логика и техника. Изд-во «Знание», 1962, 46 стр.

Л. А. Калужнин. Что такое математическая логика? Изд-во «Наука», 1964, 151 стр.

Э. Беркли. Символическая логика и разумные машины. Изд-во иностр. лит-ры, 1961, 260 стр.

А. Тарский. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. Изд-во иностр. лит-ры, 1948, 327 стр.

Д. Т. Калбертсон. Математика и логика информационных устройств, Изд-во «Просвещение», 1965, 267 стр.

П. С. Новиков. Элементы математической логики. Физматгиз, 1959, 400 стр.

---

[1] Список составлен в порядке возрастающей трудности.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел второй

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ

Эрнест Кольман,
Отокар Зих

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ЛОГИКА

Перевод с чешского

Утверждено к печати
Редколлегией научно-популярной литературы
Академии наук СССР

Редактор *Н. И. Стяжкин*

Редактор Издательства *Е. М. Кляус*

Художник *А. Д. Смеляков*

Технический редактор *А. П. Ефимова*

Сдано в набор 20/X 1965 г.
Т-01620. Подп. к печати 22/I 1966 г.
Формат 84×108$^1/_{32}$. Печ. л. 4(8). Усл. печ. л. 6,72.
Уч.-изд. л. 5,4. Тираж 50 000 экз.
Изд. № 500/66. Тип. зак. 5944.

Цена 20 коп.

Издательство «Наука».
Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21
2-я типография Издательства «Наука».
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

20 коп.



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»